SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 114592-114601
Volume 5 Nomor 3 Tahun 2021

Ruang Hasil Kali Dalam

Ika Juliana[1], Molli Wahyuni[2]

[1,2]Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai
e-mail: ikjlnaa@gmail.com

Abstrak

Suatu ruang hasil kali dalam adalah suatu ruang bernorm. Namun secara umum, suatu ruang bernorm bukan ruang hasil kali dalam. Teori pada ruang hasil kali dalam merupakan teori yang paling banyak dikembangkan. Namun teori tersebut tidak berlaku secara umum pada ruang bernorm. Agar teori tersebut juga berlaku pada ruang bernorm, ruang hasil kali dalam digeneralisasi menjadi ruang semi hasil kali dalam, sehingga suatu ruang bernorm dapat dibentuk menjadi ruang semi hasil kali dalam. Hasil kali dalam jika memenuhi keempat aksioma, yaitu (1) aksioma kesimetrisan, (2) aksioma penjumlahan, (3) aksioma kehomogenan dan (4) aksioma kepositifan, maka ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam

Kata kunci: *Ruang Hasil Kali Dalam, Ruang Bernorma*

Abstract

An inner product space is a normed space. But in general, a normed space is not an inner product space. The theory of inner product spaces is the most developed theory. However, the theory does not generally apply to normed spaces. In order for the theory to also apply to a normal space, the inner product space is generalized into an inner product space, so that a normal space can be formed into an inner product space.The inner product if it satisfies the four axioms, namely (1) the axiom of symmetry, (2) the axiom of summation, (3) the axiom of homogeneity and (4) the axiom of positivity, then the vector space equipped with the inner product is called the inner product space.

Keywords : *Inner Product Space, Normed Space.*

PENDAHULUAN

Suatu ruang hasil kali dalam merupakan ruang bernorm, dengan norm yang di induksi dari hasil kali dalamnya. Namun secara umum, ruang bernorm bukanlah ruang hasil kali dalam. Teori pada ruang hasil kali dalam merupakan teori yang paling banyak dikembangkan. Namun teori tersebut tidak berlaku secara umum pada ruang bernorm. Agar teori tersebut juga berlaku pada ruang bernorm, pada tahun 1961, Lumer [6] menggeneralisasi ruang hasil kali dalam yang disebut sebagai ruang semi hasil kali dalam Lumer. Pada tahun 1967 Giles mengembangkan konsep ruang semi hasil kali dalam Lumer dengan menambahkan sifat homogenitas pada definisi ruang semi hasil kali dalam Lumer. Hasil pengembangan ini disebutruang semi hasil kali dalam Lumer-Giles atau disingkat sebagai ruang semi hasil kali dalam. Pada penelitian ini akan dikaji definisi ruang semi hasil kali dalam, eksistensi semi hasil kali dalam pada ruang bernorm beserta contoh ruang semi hasi kali dalam.

Analisis fungsional merupakan cabang dari analisis yang membahas ruang-ruang vektor berdimensi tak hingga dan pemetaan di antara ruang-ruang tersebut. Studi vektor di dalam analisis fungsional melibatkan topologi sehingga konsep kekontinuan dan kekonvergenan dapat dibicarakan. Objek-objek bahasan yang dikenal di dalam analisis fungsional meliputi ruang banach, ruang hilbert, dan operator-operator linier kontinu pada ruang-ruang tersebut. Salah satu bagian dari analisis fungsional adalah bagaimana memperluas teori ukuran, integral dan peluang ke ruang berdimensi tak hingga. Cabang matematika ini dikenal sebagai dimensi tak hingga. Notasi vektor ternyata juga mempunyai kegunaan besar dalam bidang Fisika dan Matematika. Salah satu keuntungan vektor ialah memungkinkan penelitian masalah dalam ruang tanpa memakai sumbu-sumbu koordinat. Vektor dinyatakan oleh tanda panah di atas huruf atau huruf dicetak tebal.

Analisis Fungsional juga membahas tentang hasil kali dalam (*inner product*). Sebuah hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor riil *V* adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil (**u**, **v**) dengan masing-masing pasangan vektor **u** dan **v** pada *V* sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma hasil kali dalam dipenuhi untuk semua skalar vektor **u**, **v**, **w** di *V* dan juga untuk semua skalar *k.* Ruang vektor riil dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam riil (*real product space*) (Anton, 1997).

Seperti halnya pada pembahasan ilmu aljabar ini berdasar penelitian P. K. Harikrishnan, P. Riyas, K. T. Ravindran (2011) dan H. Mazaheri1, R. Kazemi (2007) dengan judul *Some Results On 2-Inner Product Spaces*, Dari penelitian yang sudah ada tersebut penulis ingin membahas serta menemukan ilmu yang baru, dalam hal ini penulis membahas tentang hasil kali dalam.

METODE

Agar memudahkan penyelesaian masalah dalam artikel ini, penulis menggunakan metode studi kepustakaan, jurnal dan konsultasi kepada dosen pembimbing untuk memudahkan penulis dalam menyelesaikan masalah dalam artikel ini.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ruang Hasil Kali Dalam

Ruang Hasil Kali Dalam adalah fungsi yang mengaitkan setiap pasangan vektor di ruang vektor V (Misalkan pasangan $\boldsymbol{\bar{u}}$ dan $\boldsymbol{\bar{v}}$, di notasikan dengan $<\boldsymbol{\bar{u}},\boldsymbol{\bar{v}}>$) dengan bilangan real dan memenuhi keempat aksioma sebagai berikut:

Aksioma 1. $<\bar{u},\bar{v}> = <\bar{v},\bar{u}>$ **{Simetris}**

Aksioma 2. $<\bar{u}+\bar{w},\bar{v}> = <\bar{u},\bar{w}> + <\bar{w},\bar{v}>$ **{Aditivitas}**

Aksioma 3. $<l\bar{u},\bar{v}> = l<\bar{u},\bar{v}>$ **{Homogenitas}**

Aksioma 4. $<\bar{u},\bar{u}> \geq 0$ dan $<\bar{u},\bar{u}> = 0$ jika dan hanya jika u = 0 **{Positivitas}**

Ruang Vektor yang dilengkapi dengan operasi hasil kali dalam disebut Ruang Hasil Kali Dalam. Jika u = $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan v = $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor sembarang, jelas bahwa hasil kali titik $<\bar{u},\bar{v}> = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$ untuk u,v ϵ R^n merupakan hasil kali dalam. Bentuk lain dari hasil kali titik yang diberi bobot, misalnya k_1, k_2, k_3, ..., k_n bilangan real positif, hasi kali titik yang di boboti dinyatakan dalam bentuk $<\bar{u},\bar{v}> = k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2 + k_3u_3v_3 + \cdots + k_nu_nv_n$ untuk u,v ϵ R^n

<u>Pembuktian</u>

Bentuk $<\bar{u},\bar{v}> = k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2 + k_3u_3v_3 + \cdots + k_nu_nv_n$ untuk u,v ϵ R^n

Aksioma 1

$<\boldsymbol{\bar{u}},\boldsymbol{\bar{v}}> = <\boldsymbol{\bar{v}},\boldsymbol{\bar{u}}>$

a) $<\bar{u},\bar{v}> = <\bar{v},\bar{u}>$
$= k_1u_1v_1 + k_2u_2v_2 + \cdots + k_nu_nv_n$ {Komutatif terhadap perkalian}
$= k_1v_1u_1 + k_2v_2u_2 + \cdots + k_nv_nu_n$ {Definisi hasil kali titik yang di boboti}
$= <\bar{v},\bar{u}>$ **(Terbukti Simetris)**

Jadi, terbukti simetris pada aksioma 1

Aksioma 2

$<\boldsymbol{\bar{u}}+\boldsymbol{\bar{w}},\boldsymbol{\bar{v}}> = <\boldsymbol{\bar{u}},\boldsymbol{\bar{v}}> + <\boldsymbol{\bar{w}},\boldsymbol{\bar{v}}>$

b) $<\bar{u}+\bar{w},\bar{v}> = <\bar{u},\bar{v}> + <\bar{w},\bar{v}>$
$<\bar{u}+\bar{w},\bar{v}> = k_1\ (u_1 + w_1)v_1 + k_2\ (u_2 + w_2)v_2$ +...+ $k_n\ (u_n + w_n)v_n$...

{Sifat distributif bilangan real}

$= k_1(u_1 v_1 + w_1 v_1) + k_2(u_2 v_2 + w_2 v_2) + ... + k_n (u_n v_n + w_n v_n)$ ... {Sifat distributif bilangan real}

$= (k_1 u_1 v_1 + k_2 w_2 v_2) + (k_1 u_1 v_1 + k_2 w_2 v_2) + ... + (k_n u_n v_n + k_n w_n v_n)$ {Asosiatif bilangan real}

$=(k_1 u_1 v_1 + k_2 u_2 v_2) + (k_2 u_2 v_2 + k_2 w_2 v_2) + ... + (k_n u_n v_n + k_n w_n v_n) + (k_1 w_1 v_1 + k_2 w_2 v_2) + ... + (k_n w_n v_n)$ {Definisi $<\bar{u}, \bar{v}>$}

$= \quad <\bar{u}, \bar{v}> \quad + \quad <\bar{w}, \bar{v}>$ **(Terbukti Aditivitas)**

Jadi, terbukti Aditivitas pada aksioma

Aksioma 3

$(l\bar{u}, \bar{v}) = l\,(\bar{u}, \bar{v})$

c) $<l\bar{u}, \bar{v}> \quad = l <\bar{u}, \bar{v}>$

$<k\bar{u}, \bar{v}> \; = \; k_1\, l u_1 v_1 + k_2\, l u_2 v_2 + ... + k_n\, l u_n v_n$ {Distribusi bilangan real}

$= l\,(k_1 u_1 v_1 + k_2\, l u_2 v_2 + ... + k_n\, l u_n v_n)$ {Definisi $<\bar{u}, \bar{v}>$

$= l <\bar{u}, \bar{v}>$ **(Terbukti Homogenitas)**

Jadi, terbukti Homogenitas pada aksioma 3

Aksioma 4

$<\bar{u}, \bar{u}> \geq 0$ dan $<\bar{u}, \bar{u}> = 0$ jika dan hanya jika u = 0

d) $<\bar{u}, \bar{u}>$

$= k_1 u_1 u_1 + k_2 u_2 u_2 + ... + k_n u_n u_n$

$= k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + \cdots + k_n u_n^2 \geq 0$ **(Terbukti Positifitas)**

$<\bar{u}, \bar{u}> \; = 0$

$= u_1^2 + u_2^2 = 0$

$u_1^2 = 0$, $u_1 = 0$

$u_2^2 = 0$, $u_2 = 0$

Dan bernilai 0 jika $u_1 = u_2 = ... = u_n = 0$ yang berati u = 0

Norm Pada Hasil Kali Dalam

Jika *V* adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma atau panjang suatu vektor **u** dalam *V* dinyatakan dengan $||\mathbf{u}||$ dan didefinisikan sebagai

Definisi.

$$||\mathbf{u}|| = (u,u)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Jarak antara dua titik vektor **u** dan **v** dinyatakan dengan $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ dan didefinisikan sebagai

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}|| \text{ atau } d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}|| = (\mathrm{u}-\mathrm{v},\mathrm{u}-\mathrm{v})^{\frac{1}{2}}$$

$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}|| \quad = (\mathrm{u}-\mathrm{v},\mathrm{u}-\mathrm{v})^{\frac{1}{2}}$

$= [(\mathrm{u}-\mathrm{v}).(\mathrm{u}-\mathrm{v})]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

<u>Contoh Soal :</u>

Jika u = (3, -5, 2) dan v = (4, 2, -1) adalah vektor-vektor R^3 dengan hasil kali dalam, maka nilai ||u || dan $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ adalah...

$||u|| = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{3.3 + (-5).(-5) + 2.2}$

$= \sqrt{9 + 25 + 4}$

$= \sqrt{38}$

Dan $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ||\mathbf{u}-\mathbf{v}|| = (\mathrm{u}-\mathrm{v},\mathrm{u}-\mathrm{v})^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$

$= \sqrt{(3-4)^2 + \left((-5)-2\right)^2 (2-(-1))^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-7)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{1 + 49 + 9} = \sqrt{59}$

Jadi, nilai ||u|| adalah $\sqrt{38}$ dan nilai $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ adalah $\sqrt{59}$

Sifat – Sifat Ruang Hasil Kali Dalam

Jika **u,v,w** adalah vektor-vektor dalam Ruang Hasil Kali Dalam dan k skalar, maka :

1. <0,v> = <v,0> = 0
2. <u, v + w> = <u,v> + <u,w>

SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)
Halaman 114592-114601
Volume 5 Nomor 3 Tahun 2021

3. <u, kv> = k <u,v> = <ku,v>
4. <u-v,w> = <u,w> – <v,w>
5. <u,v-w> = <u,v> – <u,w>

Pembuktian

Misalkan **u** = (u_1, u_2), **v** = (v_1, v_2) dan **w** = (w_1, w_2) di ruang vektor **V**

Sifat 1

a) <0,v> = <v,0> = 0

Pembuktian

<0,v> = $0_1 v_1 + 0_2 v_2$ ... (Sifat komutatif)

$= v_1 0_1 + v_2 0_2$ ... (Sifat komutatif)

= <v,0>

Jadi, terbukti bahwa sifat 1 yaitu <0,v> = <v,0> = 0

Sifat 2

b) <u, v + w> = <u,v> + <u,w>

Pembuktian

<u, v + w> = <u,v> + <u,w>

$= <u_1 , u_1 > + <v_1 , v_2 + w, w_2 >$ ... (Sifat asosiatif)

$= <u_1 v_1 , u_2 v_2 > + <u_1 w_1 , u_2 w_2 >$ ... (Sifat distributif)

= <u,v> + <u,w>

Jadi, terbukti bahwa sifat 2 yaitu <u, v + w> = <u,v> + <u,w>

Sifat 3

c) <u, kv> = k <u,v> = <ku,v>

Pembuktian

<u, kv> = $<, u_2 > , < k\, v_1 , k\, v_2 >$

$= << k\, v_1 > + < k\, v_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= k < u_1 v_1 > + k < v_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= < k\, u_1 v_1 > + < k\, u_2 v_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= k < u_1 v_1) + < u_2 v_2 >$ ... (Sifat asosiatif)`

= k <u,v>

Jadi, terbukti bahwa sifat 3 yaitu <u, kv> = k <u,v>

SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Sifat 4

d) <u-v,w> = <u,w> – <v,w>
Pembuktian

<u-v,w) = $< u_1 , u_2 > - < v_1 , v_2 > , < w_1 \, w_2 >$

$= < u_1 - v_1 > w_1 - < u_2 - v_2 > \; w_2$ ... (Sifat distributif)

$= < u_1 \, w_1 > + < v_1 \, w_1 > - < u_2 \, w_2 > + < v_2 \, w_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= < u_1 \, w_1 + u_2 > - < v_1 \, w_1 > + (v_2 \, w_2 >$ ... (Sifat asosiatif)

= <u,w> – <v,w>

Jadi, terbukti bahwa sifat 4 yaitu <u-v,w> = <u,w> – <v,w>

Sifat 5

e) <u,v-w> = <u,v> – <u,w>
Pembuktian

<u,v-w) $= < u_1 , u_2 > , < v_1 , v_2 > - < w_1 \, w_2 >$

$= u_1 < v_1 \, w_1 > - u_2 < v_2 \, w_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= < u_1 \, v_1 > + < u_1 \, w_1 > - < u_2 \, v_2 > + < w_2 >$ ... (Sifat distributif)

$= < u_1 \, v_1 + u_2 \, v_2 > - < u_1 \, w_1 > + < u_2 \, w_2 >$ ... (Sifat asosiatif)

= <u,v> – <u,w>

Jadi, terbukti bahwa sifat 5 yaitu <u,v-w> = <u,v> – <u,w>

<u>Contoh Soal</u> :

1. Jika (u,v) =2 (v,w) = -3 (u,w) = 5 ||u|| = 1 ||v|| = 2 ||w|| = 4, hitunglah nilai :
   a) (u + v, v + w)
   b) (2v – w, 3u + 2w)
   c) (u–v–2w, 4u + v)
   d) ||u + v||
   e) ||2w – v||

Pembahasan :

a) (u + v, v + w)
(u + v, v + w) = (u , v + w) + (v, v + w)
= (u,v) + (u,w) + (v,v) + (v + w)

$= (u,v) + (u,w) + ||v||^2 + (v,w)$

$= 2 + 5 + (2)^2 + (-3)$

$=8$

Jadi, nilai (u + v, v + w) adalah 8

b) (2v – w, 3u + 2w)

(2v – w, 3u + 2w) $= (2v - w, 3u) + (2v - w, 2w)$

$= (2v, 3u) - (w, 3u) + (2v, 2w) - (w, 2w)$

$= 6 (v,u) - 3 (w,u) + 4 (v,w) - 2 (w,w)$

$= 6 (v,u) - 3 (u,w) + 4 (w,v) - 2 ||w||^2$

$= 6.\ 2 - 3.5 - 4.(-3) - 2.(4)^2$

$= 12 - 15 - 12 - 32$

$= - 47$

Jadi, nilai (2v – w, 3u + 2w) adalah – 47

c) (u–v–2w, 4u + v)

(u–v–2w, 4u + v) $= (u-v-2w, 4u) + (u-v-2w, v)$

$= (u, 4u) - (v, 4u) - (2w, 4u) + (u,v) - (v,v) - (2w,v)$

$= 4 (u,u) - 4 (v,u) - 8 (w,u) + (u,v) - (v,v) - 2 (w,v)$

$= 4.\ ||u||^2 \cancel{- 4 (u,v)} - 8 (u,w) + \cancel{(u,v)} - ||v||^2 - 2 (v,w)$

$= 4.\ ||u||^2 - 3 (u,v) - 8 (u,w) - ||v||^2 - 2 (v,w)$

$= 4.\ (1)^2 - 3.2 - 8.5 - (2)^2 - 2.(-3)$

$= 4 - 6 - 40 - 4 + 6$

$= - 40$

Jadi, nilai (u–v–2w, 4u + v) adalah – 40

d) ||u + v||

$||u + v|| = (u + v, u + v)^{\frac{1}{2}}$

$||u + v||^2 = (u + v, u + v)$

$= (u + v, u) + (u + v, v)$

$= (u,u) + (v,u) + (u,v) + (v,v)$

$= ||u||^2 + 2 (u,v) + ||v||^2$

$= (1)^2 + 2.2 + (2)^2$

= 1+ 4 + 4

= 9

||u + v|| = $\sqrt{9}$

= 3

Jadi, nilai ||u + v|| adalah 9

e) ||2w – v||

||2w – v|| = $(2w - v, 2w - v)^{\frac{1}{2}}$

= $||2w - v||^2 = (2w - v, 2w) - (2w - v, v)$

= $(2w, 2w - v) - (v, 2w - v)$

= (2w, 2w) – (2w, v) – ((v,2w) – (v,v))

= (2w, 2w) – (2w, v) – (v,2w) + (v,v)

= 4 (w,w) – 2 (v,w)) – 2 (v,w) + (v,v)

= $4. ||w||^2 - 4 (v,w) + ||v||^2$

= $4. (4)^2 - 4. (-3) + (2)^2$

= 4. 16 + 12 + 14

= 64 + 12 + 4

= 80

||2w – v|| = $\sqrt{80}$

= $4\sqrt{5}$

Jadi, nilai ||2w – v|| adalah $4\sqrt{5}$

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan maka disimpulkan bahwa suatu vektor u dan v pada ruang vektor *V* riil yang yang ditulis sebagai (u, v) disebut hasil kali dalam jika memenuhi keempat aksioma, yaitu (1) aksioma kesimetrisan, (2) aksioma penjumlahan, (3) aksioma kehomogenan dan (4) aksioma kepositifan, maka ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Sifat – Sifat Ruang Hasil Kali Dalam adalah (1) (0,v) = (v,0) = 0**,** (2) (u, v + w) = (u,v) + (u,w) , (3) (u, kv)= k (u,v) = (ku,v) , (4) (u-v,w) = (u,w) – (v,w) **,** (5) (u,v-w) = (u,v) – (u,w).

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.Anton, H. 1997. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. 2000a. *Aljabar Linier Elementer.* Jakarta: Erlangga.

Anton, H. 2000b. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Jilid 1.* Batam: Interaksara.

Cullen, C.G. 1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia.

Hasan, I. 2002. *Metodologi Penelitian dan Aplikasinya.* Jakarta: Ghalia Indonesia.

'Imrona, M. 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Kusumawati, R. 2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN-Press.Pamuntjak.

Parzynski, W.R dan Zipse, P.W., dkk. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill, InC.

Suminto, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Edisi 7 jilid 2.* Batam:Interaksara.

Tazi, I. 2008. *Matematika Untuk Sains dan Teknik.* Malang: UIN-Press.