SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 914-919
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

Jumlahan Langsung Pada Ring

Nurul Istiqomah

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai
e-mail: istiqomahnurul378@gmail.com

Abstrak

Struktur aljabar dengan satu himpunan objek dan dua operasi yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu disebut Ring Dalam struktur aljabar, terdapat sebuah operasi yang disebut jumlahan langsung. Jumlahan langsung dengan jumlahan biasa tidak sama. Pada penjumlahan biasa tidak memperhatikan urutan komponennya, tetapi pada penjumlahan langsung memperhatikan urutan komponennya. Artikel ini akan mengkaji tentang jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada struktur aljabar ring besertasifat-sifatnya Metode pengumpulan informasi yang digunakan adalah studi literatur. Dengan adanya artikel ini, peserta didik bisa mengetahui jenis-jenis jumlahan langsung dan sifat-sifat jumlahan langsung pada ring (struktur aljabar)

Kata kunci: *Struktur Aljabar, Ring, Jumlahan Langsung*

Abstract

The algebraic structure with one set of objects and two operations that satisfy certain axioms is called a ring. In algebraic structures, there is an operation called direct sum. Direct sums and ordinary sums are not the same. In ordinary addition, it does not pay attention to the order of its components, but in direct summation, it pays attention to the order of its components. This article will examine the external direct sum and internal direct sum in ring algebraic structures and their properties. The information collection method used is a literature study. With this article, students can find out the types of direct sums and the properties of sums directly on the ring (algebraic structure).

Keywords : *The Algebraic Structure, Ring,Direct Sum*

PENDAHULUAN

Strukur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong R dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya asosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) yang memenuhi tiga aksioma diantara yaitu $(R,+)$ berupa grup abelian, operasi kedua (×) bersifat asosiatif dan operasi kedua (×) bersifat distributif terhadap operasi pertama (+) disebut ring. Dalam struktur aljabar, terdapat sebuah operasi yang disebut “jumlahan langsung”. Jumlahan langsung dengan jumlahan biasa tidak sama. Pada penjumlahan biasa tidak memperhatikan urutan komponennya, tetapi pada penjumlahan langsung memperhatikan urutan komponennya. Jumlahan langsung terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal.

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Jumlahan Langsung Pada Ring

Jumlahan langsung pada ring terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Berikut diuraikan definisi dari keduanya.

1. **Jumlahan Langsung Eksternal**

Definisi 3.1(hartley dan hawkes, 1970:33)

Misalkan $R_1,R_2,\ldots,Rn$ adalah kumpulan ring dan R adalah Hasil kali kartesian pada himpunan Ri, dan didefinisikan operasi pada R “secara komponen”, yaitu:

a. $(r_1,r_2,\ldots,rn)+(s_1,s_2,\ldots,sn)=(r_1+s_1,r_2+s_2,\ldots,rn+sn)$
b. $-(r_1,r_2,\ldots,rn) = (-r_1,-r_2\ldots,-rn)$
c. $(r_1,r_2,\ldots,rn)(s_1,s_2,\ldots,sn) = (r_1s_1,r_2s_2,\ldots,rnsn)$

Dengan (0,0,…,0) sebagai elemen nol/identitas. R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1,R_2,\ldots,Rn$ dan dinotasikan sebagai

$$R_1 \oplus R_2 \oplus\ldots\oplus Rn.$$

Definisi di atas menunjukkan bahwa jumlahan langsung external dari ring $R_1,\ldots,Rn$ adalah

$$R = R_1 \oplus R_2 \oplus\ldots\oplus Rn$$

dengan operasi penambahan dan perkalian bersifat komponen.

Contoh 3.1

Diketahui $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ dan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ merupakan ring.
Jumlahan langsung eksternal dari $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$ adalah
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 = \{0,1\} \oplus \{0,1,2,3\} = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3)\}$

2. **Jumlahan Langsung Internal**

Definisi 3.2 (hartley dan hawkes, 1970:34)

Misal R adalah ring, dan $J_1,\ldots,Jn$ adalah ideal-ideal dari R, sedemikian sehingga

a. $R = \sum_{i=1}^{n} Ji$, dan
b. $J_i \cap \sum J \neq i\ J_j = \{0\}$, $J\neq i$ untuk $i = 1,\ldots,n$.

Maka R disebut sebagai jumlahan langsung internal dari ideal-ideal J_i yang dinotasikan sebagai $R = \oplus\ Ji$.

Definisi di atas menunjukkan bahwa suatu ring R disebut jumlahan langsung internal dari ideal-ideal $J_1,\ldots,Jn$ jika berlaku:

$$R= J_1+J_2+\cdots+Jn$$

dan

$$Ji \cap (J_1+J_2+\cdots+Ji-1+Ji_{+1}+\cdots+Jn) = \{0\},\text{untuk } i = 1,\ldots,n.$$

Contoh 3.2

Misal $\mathbb{Z}_6$ adalah ring dan P_1, P_2,P_3 adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$, dimana $P_1= \{0\}$, $P_2 = \{0,3\}$, $P_3 = \{0,2,4\}$, $\mathbb{Z}_6$ merupakan jumlahan langsung internal dari P_1, P_2,P_3, karena:

a. $P_1+P_2+ P_3 = \{0\} + \{0,3\} + \{0,2,4\}$
$=\{0,1,2,3,4,5\}$
b. $P_1 \cap (P_2+ P_3) = \{0\} \cap \{0,2,4,3,5,1\}$
$= \{0\}$
c. $P_2 \cap (P_1+ P_3) = \{0,3\}\cap\{0,2,4\}$
$=\{0\}$
d. $P_3\cap(P_1+ P_2) = \{0,2,4\} \cap \{0,3\}$
$=\{0\}$

Apabila di ambil $P_3 = \{2,4\}$ maka $\mathbb{Z}_6$ bukan jumlahan langsung internal dari P_1, P_2,P_3, karena P_3 bukan ideal di $\mathbb{Z}_6$ (karena apabila diambil $0 \in \mathbb{Z}_6$, dan $2\in P_3$ maka $0\times 2 = 0 \notin P_3$)

Sifat – Sifat Jumlahan Langsung Pada Ring

Pada bagian ini akan diuraikan sifat-sifat jumlahan langsung pada ring beserta pembuktiannya.

Teorema 3.1

Jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring.

Bukti

Diketahui $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus Rn$ merupakan jumlahan langsung eksternal dari ring Ri, dengan i=1,2,…,n.

Ambil sebarang $a,b,c \in R$, tulis $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$, $c = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$, untuk suatu $a_1,b_1,c_1 \in R_1$, $a_2,b_2,c_2 \in R_2$, $a_n,b_n,c_n \in R_n$, akan ditunjukkan $(R,+,\cdot)$ merupakan ring.

1. Tertutup
   Untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a+b \in R$.
   $a + b = (a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)$
   $= (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$
   dengan $(a_1+b_1) \in R_1$, $(a_2+b_2) \in R_2$,…, $(a_n+b_n) \in R_n$
   jadi $(a+b) \in R$
2. Asosiatif
   Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   $(a+b)+c = ((a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)) + (c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)+(c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= ((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2,\ldots,(a_n+b_n)+c_n)$
   $= (a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2),\ldots,a_n+(b_n+c_n))$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n)+((b_1,b_2,\ldots,b_n)+(c_1,c_2,\ldots,c_n))$
   $= a+(b+c)$
3. Terdapat unsur identitas
   Untuk setiap $a \in R$, terdapat $e \in R$, sehingga $a+e = e+a = a$.
   Ambil sebarang $a \in R$, akan ditunjukkan terdapat $e \in R$ tulis $e=(e1,e2,\ldots,en)$, dengan $e_1 \in R_1,e_2 \in R_2,\ldots,e_n \in R_n$ sehingga berlaku
   $$a+e = e+a=a$$
   Pilih $0_R \in R$, tulis $0_R = (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})$, dengan $0_{Ri} \in_{Ri}, 0_{Ri}$ adalah unsur identitas di Ri.
   Perhatikan bahwa:
   $a+0_R = (a_1,a_2,\ldots,a_n)+(0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})$
   $= (a_1+0_{R1},a_2+0_{R2},\ldots,a_n+0_{Rn})$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n)$
   $0_R + a = (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})+(a_1,a_2,\ldots,a_n)$
   $= (0_{R1}+a_1,0_{R2}+a_2,\ldots,0_{Rn}+a_n)$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n)$
   Jadi $0_R \in R$ adalah unsur identitas di R.
4. Untuk setiap unsur memiliki invers
   Untuk setiap $a \in R$, terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga $a+a^{-1}=a^{-1}+a = 0_R$.
   Ambil $a \in R$ sebarang, akan ditunjukkan terdapat $a^{-1} \in R$ sehingga berlaku
   $$a+a^{-1} = a^{-1} + a = 0_R$$
   Diketahui $0_R = (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})$
   $a+a^{-1} = 0R$
   $(a_1,a_2,\ldots,a_n) + a^{-1} = (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})$
   $a^{-1} = (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})-(a_1,a_2,\ldots,a_n)$
   $= (0_{R1},0_{R2},\ldots,0_{Rn})+(-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$
   $= (0_{R1}+(-a_1),0_{R2}+(-a_2),\ldots,0_{Rn}+(-a_n))$
   $= (-a_1,-a_2,\ldots,-a_n) \in R$
   Sehingga $a^{-1}= (-a_1,-a_2,\ldots,-a_n)$ adalah unsur invers untuk setiap $a \in R$.
5. Untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a+b = b+a$
   $(a+b) = (a_1,a_2,\ldots,a_n) + (b_1,b_2,\ldots,b_n)$
   $= (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$

$= (b_1+a_1,b_2+a_2,\ldots,b_n+a_n)$ [karena $a_i,b_i \in R_i$, i=1,2,…,n]
$= b + a$

$(R,\cdot)$ semigrup

1. Tertutup
   Untuk setiap $a,b \in R$ berlaku $a\cdot b \in R$.
   $a \cdot b = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot (b_1,b_2,\ldots,b_n)$
   $= (a_1b_1,a_2b_2,\ldots,a_nb_n)$
   dengan $(a_1b_1) \in R_1$, $(a_2b_2) \in R_2,\ldots,(a_nb_n) \in R_n$
   jadi $(a \cdot b) \in R$
2. Asosiatif
   Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
   $(a \cdot b) \cdot c = ((a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\ldots,b_n))\cdot(c_1,c_2,\ldots,cn)$
   $= (a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2,\ldots,a_n\cdot b_n)\cdot(c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= ((a_1\cdot b_1)\cdot c_1,(a_2\cdot b_2)\cdot c_2,\ldots,(a_n\cdot b_n)\cdot c_n)$
   $= (a_1\cdot(b_1\cdot c_1),a_2\cdot(b_2\cdot c_2),\ldots,a_n\cdot(b_n\cdot c_n))$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot((b_1,b_2,\ldots,b_n)\cdot(c_1,c_2,\ldots,c_n))$
   $= a \cdot (b \cdot c)$
3. $(R,+,\cdot)$ distributif kanan dan kiri
   Untuk setiap $a,b,c\in R$, berlaku:

a. $(a+b)\ .\ c = a \cdot c + b \cdot c$
b. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

1) Distributif kanan
   $(a+b)\ .\ c\ \ = ((a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)) \cdot (c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)\cdot(c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= ((a_1+b_1) \cdot c_1,(a_2+b_2)\cdot c_2,\ldots,(a_n+b_n)\cdot c_n)$
   $= ((a_1\cdot c_1) + (b_1\cdot c_1), (a_2\cdot c_2) + (b_2\cdot c_2),\ldots, (a_n\cdot c_n) + (b_n\cdot c_n)$
   $= (a_1\cdot c_1,a_2\cdot c_2,\ldots,a_n\cdot c_n+b_1\cdot c_1,b_2\cdot c_2,\ldots,b_n\cdot c_n)$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot (c_1,c_2,\ldots,c_n) + (b_1,b_2,\ldots,b_n) \cdot (c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= a \cdot c + b \cdot c$
2) Distributif kiri
   $a \cdot (b+c) = (a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot ((b_1,b_2,\ldots,b_n) + (c_1,c_2,\ldots,c_n))$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2,\ldots,b_n+c_n)$
   $= (a_1 \cdot ((b_1+c_1), a_2 \cdot (b_2+c_2),\ldots,a_n \cdot (b_n+c_n))$
   $= ((a_1\cdot b_1) + (a_1\cdot c_1), (a_2\cdot b_2) + (a_2\cdot c_2),\ldots,(a_n\cdot b_n)+(a_n\cdot c_n)$
   $= (a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2,\ldots,a_n \cdot b_n+a_1\cdot c_1,a_2\cdot c_2,\ldots,a_n\cdot c_n)$
   $= (a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot (b_1,b_2,\ldots,b_n) + (a_1,a_2,\ldots,a_n) \cdot$
   $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$
   $= a \cdot b + a \cdot c$

Jadi, jumlahan langsung eksternal dari ring adalah ring.

Teorema 3.3

Jika $R = \oplus P_i$, dengan Pi ideal dari R, i = 1,2,…,n dengan:
$Q_1=P_1+P_2+\cdots+P_{k1}$
$Q_2=P_{k1+1}+P_{k1+2}+\cdots+P_{k1+k2}$
$Q_3=P_{k1+k2+1}+P_{k1+k2+2}+\cdots+P_{k1+k2+k3}$
.
.
.
$Qr=P_{k1+k2+\ldots+kr-1+1}+P_{k1+k2+\cdots+kr-1+2}+\cdots+Pn$
maka $R = \oplus\ Q_j, j$ = 1,2,…, r.

Bukti

Diketahui $R = \oplus P_i$, dengan P_i ideal dari R, i=1,2,…,n dan
$Q_1= P_1+P_2+\cdots+P_{k1}$
$Q_2= P_{k1+1}+P_{k1+2+}\cdots+P_{k1+k2}$

Q_3= $P_{k1+k2+1}$ + $P_{k1+k2+2+\cdots}$ +$P_{k1+k2+k3}$

.

.

Qr=$P_{k1+k2+\cdots+kr-1+1}$+$P_{k1+k2+\ldots+kr-1+2+\cdots+}P_n$ akan dibuktikan
R = ⊕ Q_j ,j = 1,2,… ,r.
karena R = ⊕ Pi maka berlaku:
R = P_1+P_2+⋯+P_n
= P_1 + P_2 + ⋯ +P_{k1} + P_{k1+1}+$P_{k1+2+\ldots}$+ P_{k1+k2} +$P_{k1+k2+1}$ + $P_{k1+k2+2+\ldots}$+ $P_{k1+k2+k3+}$⋯+$P_{k1+k2+\cdots+kr-1+1}$+$P_{k1+k2+\cdots+kr-1+2+\cdots}$+$P_n$
= Q_1+Q_2+Q_3+...+Q_r
= ⊕Qj

Contoh 3.3
Berdasarkan Contoh 3.2, $\mathbb{Z}_6$ = ⊕ Pi,i =1,2,3,.
Misal : Q_1 =P_1+P_2
= {0}+{0,3}
= {0,3}
Q_2 = P_3
={0,2,4}
akibatnya $\mathbb{R}_3$ = ⊕ Q_j, j = 1,2.

Teorema 3.4 (Hartley dan Hawkes, 1970:35)
Jika R adalah jumlahan langsung internal dari ideal-ideal J_1,J_2,…,J_n, maka untuk setiap r∈R dapat ditulis secara tunggal bentuk
r = r_1 + r_2 + ⋯ + r_n dengan r_i ∈ J_i

Bukti
Misalkan r_1+r_2+⋯+r_n = r_1'+r_2'+⋯+r_n' , dengan r_i , r_i' ∈ J_i. akan ditunjukkan r_i=r_i'. perhatikan bahwa :
$r_1+r_2+\cdots+r_n=r_1'+r_2'+\cdots+r_n'$
⇔ $(r_1+r_2+\cdots+r_n) - (r_1'+r_2'+\cdots+r_n') = 0$
⇔ $(r_1-r_1') + (r_2-r_2') +\cdots+ (r_n-r_n') = 0$
⇔ $(r_1-r_1') + (r_2-r_2') +\cdots+ (ri_{-1}-r_{i-1}') + (r_i-r_i') + (r_{i+1}-r_{i+1}') +\cdots+ (r_n-r_n') = 0$
⇔ $ri-ri' = -(r_1-r_1') - (r_2-r_2') -\cdots- (r_{i-1}-r_{i-1}') - (r_i-r_i') - (r_{i+1}-r_{i+1}') - \cdots - (r_n-r_n')$
⇔$r_i-r_i' = (r_1'-r_1) + (r_2'-r_2) +\cdots+ (r_{i-1}'-r_{i-1}) + (r_i'-r_i) + (r_{i+1}'-r_{i+1}) +\cdots+ (r_n'-r_n)$
karena r_i,r_i'∈ J_i, maka r_i-r_i' ∈ J_i
selanjutnya karena r_1'- r_1 ∈ J_1 , r_2' - r_2 ∈ J_2 ,…, $r_{i-1}'-r_{i-1}$ ∈ J_{i-1}, $rr_{+1}'-r_{i+1}$∈J_{i+1},…,$r_n'-r_n$ ∈ J_n , maka $\Sigma(j\neq irj'-rj)=ri-ri'\in\Sigma Jjj\neq i$
perhatikan bahwa R merupakan jumlahan langsung internal, sehingga $J_i \cap \Sigma_{j\neq i} J_j$={0}
karena r_i-r_i' ∈ J_i dan r_i-r_i' ∈ $\Sigma_{j\neq i}Jj$, akibatnya r_i-r_i' ∈ $J_i\cap\Sigma_{j\neq i}J_j$={0}
sehingga diperoleh r_i-r_i'=0
dengan bentuk lain r_i=r_i'.
Jadi, untuk setiap r ∈ R dapat ditulis secara tunggal bentuk
r =r 1 + r_2 +⋯+ rn dengan ri∈Ji. ■

Contoh 3.4
Misal $\mathbb{Z}_6$ adalah ring, dan r_1={0},$r2$={0,3},$r3$={0,2,4} adalah ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_6$. Perhatikan bahwa untuk setiap r∈$\mathbb{Z}_6$ secara tunggal dapat di bentuk :
r = r_1+r_2+r_3, r_1,r_2,r_3 ∈ J_i yaitu
0 = 0+0+0
1 = 0+3+4
2 = 0+0+2
3 = 0+3+0
4 = 0+0+4
5 = 0+3+2

SIMPULAN

Jumlahan langsung pada ring terdiri dari jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal. Jumlahan langsung eksternal adalah hasil kali kartesian dari kumpulan ring $R1,R2,\ldots,Rn$ yang dinotasikan dengan $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus Rn$. Jumlahan langsung internal adalah kumpulan dari ideal-ideal di R yang memenuhi $R = \Sigma_{j \neq i} J_j$, dan $J_i \cap \Sigma_{j \neq i} J_j = \{0\}$ untuk $i=1,\ldots,n$, dimana Ji adalah ideal-ideal di R.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yan telah terlibat dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B, dkk. 1994. Basic Abstract Algebra. Cambridge University Press: Inggris

Dewi, Nurmala R. 2013. Polinomial atas Ring. Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi/Matematika. Malang:Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 2004. Abstract Algebra. Laurie Rosatone: United States of America

Gallian, Joseph A. 2017. Contemporary Abstract Algebra. Cengage Learning: United States of America

Suryanti, Sri. 2018. Teori Ring. Gresik : UGM Press

Tahmir, Suradi. 2018. Struktur Aljabar. Makassar: Badan Penerbit Universitas Negeri Makassar.

Wahyuni, Sri., dkk. 2016. Teori Ring dan Modul. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Wildanianti, Yunita. 2009. Penjumlahan Langsung pada Modul. Skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi/Matematika. Malang:Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.