SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 17573-17580
Volume 8 Nomor 2 Tahun 2024

Matriks *Skew*-simetris dan Sifat-sifatnya

Wirdatul Hasanah[1], Yusmet Rizal[2]

[12]Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Padang
e-mail: wirdatulhasanah273@gmail.com

Abstrak

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris dan kolom, dimana bilangan-bilangan dalam susunan disebut entri. Nama sebuah matriks menggunakan huruf kapital. Berdasarkan ukurannya, matriks terbagi dua, yaitu matriks bujur sangkar dan matriks tak bujur sangkar. Matriks *skew*-simetris adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada baris dan kolom yang sama bernilai berlawanan tanda $A^T = -A$. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui bagaimana matriks *Skew*-simetris dan sifat-sifatnya. Konsep yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat matriks *skew*-simetris terkait dengan penjumlahan matriks dan perkalian skalar, menentukan nilai determinan dari matriks *Skew*-simetris, menentukan nilai eigen dari matriks *Skew*-simetris, matriks nonsingular dan matriks ortogonal yang terkait dengan matriks *skew*-simetris. Hasil dari penelitian ini menyimpulkan beberapa sifat-sifat dari matriks *skew*-simetris menunjukkan matriks *skew*-simetris dengan ukuran yang sama dikalikan dengan skalar sebarang serta dijumlahkan sesama matriks *skew*-simetris akan menghasilkan matriks *skew*-simetris serta menghasilkan determinan nol dan nilai eigen nol atau imajiner.

Kata kunci: *Matriks Skew-Simetris, Nilai Eigen, Determinan*

Abstract

A matrix is a rectangular arrangement of numbers consisting of rows and columns, where the numbers in the arrangement are called entries. The name of a matrix uses capital letters. Based on their size, matrices are divided into two, namely square matrices and non-square matrices. A skew-symmetric matrix is a square matrix whose elements in the same row and column have values of opposite sign $A^T = -A$. The aim of this research is to find out how the Skew-symmetric matrix is and its properties. The concepts that will be discussed in this research are how the properties of skew-symmetric matrices are related to matrix addition and scalar multiplication, determining the determinant value of a Skew-symmetric matrix, determining the eigenvalues of a Skew-symmetric matrix, nonsingular matrices and orthogonal matrices related to skew-symmetric matrix. The results of this research conclude that several properties of the skew-symmetric matrix show that a skew-symmetric matrix of the same size, multiplied by an arbitrary scalar and added together with other skew-symmetric matrices, will produce a skew-symmetric matrix and produce a zero determinant and zero or imaginary eigenvalues.

Keywords: *Skew-symmetric Matrix, Eigen Values, Determinants*

PENDAHULUAN

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi panjang yang terdiri atas baris dan kolom, dimana bilangan-bilangan dalam susunan disebut entri (Anton & Rorres, 2013). Nama sebuah matriks menggunakan huruf kapital seperti $A, B, C, X, Y, Z, T,$ dan lain-lain. Matriks dapat diklasifikasikan berdasarkan ukuran dan sifatnya. Berdasarkan ukurannya, matriks dapat dibedakan menjadi dua, yaitu matriks bujur sangkar dan matriks tak bujur sangkar. Matriks bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya sama dengan jumlah kolomnya. Sedangkan matriks tak bujur sangkar adalah matriks yang jumlah barisnya tidak sama dengan jumlah kolomnya. Dilihat dari sifatnya, matriks bujur sangkar dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, salah satunya adalah matriks simetris dan matriks skew-simetris. Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada baris dan kolom yang sama bernilai sama. Sedangkan matriks skew-simetris adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada baris dan kolom yang sama bernilai berlawanan tanda.

Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar, matriks A dikatakan simetris jika $A^T = A$, ekuivalennya, $A = [a_{ij}]$ simetris jika entri-entri simetris adalah sama yaitu jika $a_{ij} = a_{ji}$ (Lipschutz & Lipson, 2009). Sedangkan dikatakan matriks *Skew*-simetris jika $A^T = -A$, ekuivalennya jika $a_{ij} = -a_{ji}$ dengan diagonal entri nya harus nol karena $a_{ii} = -a_{ii}$ yang disederhanakan $a_{ii} = 0$, Dimana entri-entri pada baris $i = 1, \dots, m$ dan kolom $j = 1, \dots, n$. Matriks *Skew*-simetris disebut juga dengan matriks anti simetris atau matriks simetris miring (Lipschutz & Lipson, 2009).

Seperti pada umumnya matriks, matriks *Skew*-simetris juga dapat dikaitkan dengan sifat-sifat matriks yaitu penjumlahan dan perkalian matriks, determinan, nilai eigen, serta pengaruh terhadap matriks nonsingular, dan matriks ortogonal. Matriks *Skew*-simetris menjadi bagian penting dari teori matriks dan aljabar linier. Memahami propertinya membantu dalam mengembangkan struktur dan sifat-sifat khusus dari matriks tersebut. Mengetahui sifat-sifat dari matriks *Skew*-Simetris sangat berguna dalam penyelesaian matematika agar lebih sederhana, terutama dalam kasus pemecahan sistem persamaan linear yang melibatkan matriks (Anton & Rorres, 2013).

Permasalahan utama dari matriks bujur sangkar adalah bagaimana matriks *skew*-simetris dan menentukan sifat-sifat matriks *Skew*-simetris dengan menggunakan sifat-sifat matriks pada umumnya.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian dasar/teoritis. Metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (library research atau kajian Pustaka yang relevan dengan sifat-sifat matriks Skew-simetris. Dalam penelitian ini, memulai dengan meninjau permasalahan, mengumpulkan bahan bacaan yang menjadi rujukan, mengaitkan teori-teori yang diperoleh dari bahan bacaan yang berkaitan dengan permasahan yang dibahas sehingga dapat menjawab permasalahan yang muncul serta menarik kesimpulan dari permasalahan yang telah dibahas.

Adapun langkah-langkah kerja dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan berbagai referensi yang berhubungan dengan topik pembasahan.
2. Mempelajari dan menelaah lebih mendalam teori-teori mengenai topik pembahasan.
3. Mendeskripsikan matriks *skew*-simetris.
4. Membuktikan sifat-sifat matriks Skew-simetris yaitu : Penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar.
5. Menentukan determinan matriks *Skew*-simetris.
6. Menentukan nilai eigen matriks *Skew*-simetris.
7. Menetukan keterkaitan matriks *skew*-simetris dengan matriks nonsingular dan matriks ortogonal.
8. Menarik kesimpulan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Matriks *Skew*-simetris

Definisi 2.22

Suatu matriks A berukuran $m \times m$ dengan entri-entri berupa bilangan real adalah matriks *Skew*-simetris jika dan hanya jika $A^T = -A$ (Andrilli & Hecker, 2010:53-54).

Dari definisi 2.22, perhatikan bahwa suatu matriks A disebut matriks *Skew*-simetris jika dan hanya jika $a_{ij} = -a_{ji}$. Dengan kata lain, entri-entri yang berada di atas diagonal utama akan sama tetapi berlawanan tanda dengan entri-entri yang berada dibawah diagonal utama. Karena elemen pada diagoal utama merefleksikan elemen itu sendiri, maka semua elemen pada diagonal utama dari matriks *Skew*-simetris haruslah nol $a_{ii} = -a_{ii}$ jka dan hanya jika $a_{ii} = 0$) Dimana entri-entri pada baris $i = 1, \dots, m$ dan kolom $j = 1, \dots, n$.

Contoh matriks *Skew*-simetris

1. matriks nol dengan ukuran yang sama

   misalnya : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

B. Sifat-sifat Matriks *Skew-simetris*

Teorema 4.1

Jika A dan B adalah matriks *Skew*-simetris yang berukuran $n \times n$ dengan c adalah skalar sebarang, maka:

1. $-A^T$ adalah matriks *Skew*-simetris
2. cA adalah matriks *Skew*-simetris
3. $(A + B)$ adalah matriks *Skew-simetris.*

Contoh 4.1

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, dan $c = 4$.

Tunjukkan bahwa matriks berikut adalah matriks *skew*-simetris.

a. $-A^T$
b. cA
c. $(A + B)$

Bukti :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, maka transpos dari A adalah

$A^T = -A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a_{ij} = -a_{ji}$ dan $a_{ii} = 0$.

a. Akan ditunjukkan bahwa $-A^T$ adalah matriks *skew*-simetris.

Perhatikan,

$$\begin{aligned} (-A^T) &= -(-A) \\ &= A \end{aligned}$$

$$(-A^T) = -\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan sama dengan $-A = A^T$

maka,

$$\begin{aligned} (-A^T) &= (A^T)^T \\ &= A \end{aligned}$$

$$(-A^T) = \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan $a_{ij} = -a_{ji}$ dan $a_{ii} = 0$.
Jadi diperoleh $-A^T$ adalah matriks *Skew*-simetris.

b. Akan ditunjukkan cA adalah matriks *skew*-simetris.

Perhatikan bahwa,

$$cA^T = c(-A)$$
$$= -(cA)$$

Maka,

$$cA^T = 4\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 12 & -16 \\ -12 & 0 & 20 \\ 16 & -20 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$cA^T = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 16 \\ 12 & 0 & -20 \\ -16 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan $-c(A) = -4\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 16 \\ 12 & 0 & -20 \\ -16 & 20 & 0 \end{bmatrix}$,

Dengan $ca_{ij} = -ca_{ji} = 0$ dan $cA^T = -(cA)$ Jadi diperoleh cA adalah matriks *skew*-simetris.

c. Akan ditunjukkan $(A + B)$ adalah matriks *skew*-simetris, dengan diketahui $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$,

sehingga $B^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Perhatikan bahwa,

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(A + B)^T = -A + (-B).$$
$$= -(A + B)$$

Selanjutnya diperoleh,

$$(A + B)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -7 & 0 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}\right)^T$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 7 & 0 & -10 \\ -7 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-(A + B) = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 0 & 7 & -7 \\ -7 & 0 & 10 \\ 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 7 & 0 & -10 \\ -7 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ji} + b_{ji} = -(a_{ij} + b_{ij}), (a_{ii} + b_{ii} = 0)$.

Dengan demikian, $(A + B)^T = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 7 & 0 & -10 \\ -7 & 10 & 0 \end{bmatrix}$,

sehingga $-(A + B) = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 7 & 0 & -10 \\ -7 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi, diperoleh $(A+B)$ adalah matriks *Skew*-simetris.

Teorema 4.2

Misalkan A merupakan matriks *skew*-simetris yang berukuran $n \times n$, maka $A - A^T$ adalah matriks *Skew*-simetris.

Contoh 4.2 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, $A - A^T$ adalah matriks *skew*-simetris.

Akan ditunjukkan $A - A^T$ adalah matriks *skew*-simetris. Terlebih dahulu akan dicari transpos dari matriks A, yaitu $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$,

sehingga

$$-A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} A - A^T &= A - (A^T) \\ &= A - (-A) \\ &= A + A \end{aligned}$$

Maka

$$A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -6 & 0 & 10 \\ 8 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ij} = -a_{ji}, a_{ii} = 0$. Jadi, diperoleh $A - A^T$ adalah matriks *Skew*-simetris.

Teorema 4.3

Misalkan A adalah matriks *skew*-simetris yang berukuran $m \times m$ dengan m adalah ganjil, maka $\det(A) = 0$ sehingga A adalah matriks singular.

Contoh 4.3 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks *skew*-simetris.

Akan dicari determinan A dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} \\ &= 0\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 3(-20) + 4(15) = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh determinan dari matriks A dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom 1 adalah $\det(A) = 0$. Jadi, diperoleh determinan dari matriks A adalah 0.

Teorema 4.4

Jika A adalah matriks *skew*-simetris yang berukuran $n \times n$ dengan entrinya berupa bilangan real, maka nilai eigen matriks A adalah 0 atau imajiner.

Contoh 4.4 Nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, dengan $a_{ij} = -a_{ji}$ dan $a_{ii} = 0$.

Akan dicari nilai eigen dari A:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

SSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

$$det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 3 & -4\\ -3 & 0 & 5\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda & -3 & 4\\ 3 & \lambda & -5\\ -4 & 5 & \lambda\end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 25) - 3(-3\lambda - 20) + (-4)(15 - 4\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 + 25\lambda + 9\lambda + 60 - 60 + 16\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + 50\lambda = 0$$

Oleh karena $det(\lambda I - A) = 0$, maka persamaan karakteristik dari matriks A adalah $\lambda^3 + 50\lambda = 0$ jika dan hanya jika $\lambda(\lambda^2 + 50) = 0$. Oleh karena itu, diperoleh $\lambda_1 = 0$ da $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{50}$.

Teorema 4.5

Misalkan I adalah matriks identitas dan A adalah matriks *skew*-simetris yang berukuran $n \times n$. maka:

1. $I - A$ dan $I + A$ dikatakan matriks nonsingular
2. $B = (I - A)(I + A)^{-1}$ dikatakan matriks ortogonal

Contoh 4.6 Diberikan matriks A adalah matriks *skew*-simetris berukuran $m \times m$, yaitu: $A = \begin{bmatrix}0 & 3 & -4\\ -3 & 0 & 5\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}$ dengan nilai B sebagai berikut:

Cari $(I + A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ -3 & 1 & 5\\ 4 & -5 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}$

Untuk mencari invers akan digunakan OBE, sehingga

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{c}3B_1 + B_2\\ \approx\\ -4B_1 + B_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 10 & -7 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -17 & 17 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}{}^{1}/_{10}\,B_2\\ \approx\end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & {}^{-7}/_{10} & {}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{10} & 0\\ 0 & -17 & 17 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}-3B_2 + B_1\\ \approx\\ 17B_2 + B_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & {}^{-19}/_{10} & {}^{1}/_{10} & {}^{-3}/_{10} & 0\\ 0 & 1 & {}^{-7}/_{10} & {}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{10} & 0\\ 0 & 0 & {}^{51}/_{10} & {}^{11}/_{10} & {}^{17}/_{10} & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}{}^{10}/_{51}\,B_3\\ \approx\end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & {}^{-19}/_{10} & {}^{1}/_{10} & {}^{-3}/_{10} & 0\\ 0 & 1 & {}^{-7}/_{10} & {}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{10} & 0\\ 0 & 0 & 1 & {}^{11}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{10}/_{51}\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}{}^{19}/_{10}\,B_3 + B_2\\ \approx\\ {}^{7}/_{10}\,B_3 + B_2\end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & {}^{26}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{19}/_{51}\\ 0 & 1 & 0 & {}^{23}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{7}/_{51}\\ 0 & 0 & 1 & {}^{11}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{10}/_{51}\end{array}\right]$$

Maka $(I + A)^{-1} = \begin{bmatrix}{}^{26}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{19}/_{51}\\ {}^{23}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{7}/_{51}\\ {}^{11}/_{51} & {}^{17}/_{51} & {}^{10}/_{51}\end{bmatrix}$

$$B = (I-A)(I+A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26/51 & 17/51 & 19/51 \\ 23/51 & 17/51 & 7/51 \\ 11/51 & 17/51 & 10/51 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/51 & 2/3 & 38/51 \\ -110/51 & -7/3 & -100/51 \\ 22/51 & 2/3 & -31/51 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa B adalah ortogonal, maka $B^T B = I$.

Diperoleh matriks $B = \begin{bmatrix} 1/51 & 2/3 & 38/51 \\ -110/51 & -7/3 & -100/51 \\ 22/51 & 2/3 & -31/51 \end{bmatrix}$,

maka

$$B^T = \begin{bmatrix} 1/51 & -110/51 & 22/51 \\ 2/3 & -7/3 & 2/3 \\ 38/51 & -100/51 & -31/51 \end{bmatrix}$$

sehingga $B^T B = I$. Diperoleh bahwa B adalah matriks ortogonal.

SIMPULAN

Suatu matriks A adalah matriks *Skew*-simetris jika dan hanya jika $A^T = -A$. dengan $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = -a_{ii} = 0$ ($i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$). Berdasarkan Teorema-teorema yang dibahas, dapat diperoleh beberapa sifat-sifatnya: Perkalian matriks *Skew*-simetris dengan skalar sebarang dan penjumlahan matriks tetap mengasilkan matriks *Skew*-simetris maka $A - A^T$ adalah matriks *Skew*-simetris. Berbeda dengan matriks pada umumnya matriks *skew*-simetris memiliki nilai determinan nol dan nilai eigennya nol atau imajiner. Misalkan I adalah matriks identitas dan A adalah matriks *skew*-simetris yang berukuran $n \times n$. maka:

a. $I - A$ dan $I + A$ dikatakan matriks nonsingular.
b. $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ dikatakan matriks ortogonal.

DAFTAR PUSTAKA

Andrilli, S., & Hecker, D. (2010). *Elementary Linear Algebra, Fourth Edition*. http://elsevier.com

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra : Applications Version 11th Edition* (11 th). Wiley, John and john.

Aziz, A., & Abdusysyakin. (2006). *Analisa Matematis Filsafat Al Qur'an ii*.

Brown, J. Ward., & Churchill, R. V. (Ruel V. (2009). *Complex variables and applications*. McGraw-Hill Higher Education.

Cipta, H. (2020). Completion of Matrix Inversions Using Elementary Matrix Inverse Multiplication Method. *International Journal Of Science*. http://ijstm.inarah.co.id

De, R. J., Cruz, L. A., & Paras, A. T. (2022). *Sums Of Orthogonal, Symmetric, And Skew-Symmetric Matrices* . In *Electronic Journal of Linear Algebra* (Vol. 38).

DeFranza, J., & Gagliardi, Daniel. (2009). *Introduction to linear algebra with applications*. McGraw-Hill/Higher Education.

Ford, & William. (2015). *Numerical Linear Algebra with Applications*.

Ipek, A. (2023). *On Eigenvalue, Singular Value And Norms Of A Real Skew-Symmetric Matrix*. In *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications* (Vol. 11, Issue 1). http://math-frac.org/Journals/EJMAA/

Jie Liew, K., & Thai Nguyen, V. (2020). *Hill Cipher Key Generation Using Skew-symmetric Matrix*. https://www.researchgate.net/publication/342159038

Lipschutz, Seymour., & Lipson, Marc. (2009). *Schaum's Outlines: Theory and Problem Linear Algebra* (Fourth). McGraw-Hill .

Nering, E. D. (1970). *Linear Algebra and Matrix Theory. second edition* (J. Wiley & sons, Eds.; second).

Nisa Pratiwi, P., & Sylviani, S. (2023). Implementasi Matriks Skew-symmetric dalam Metode Kriptografi Affine-Hill Cipher. *Mathematical Sciences and Applications Journal*, *4*, 2986–4180. https://doi.org/10.22437/msa.v4i1.28864

Nugroho, D., Budhiati Veronica, R., & Mashuri, D. (2017). *Struktur Dan Sifat-Sifat K-Aljabar*. http://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/ujm