

Penerapan Metode Iterasi Jacobi dengan Excel untuk Menyelesaikan Matriks Linear

Eri Widyastuti¹, Novita Sari Br Siagian², Reni Rasnita Manurung³, Rika Risgita Br Ginting⁴, Shana Audryetta Situmorang⁵, Siti Rifa Nisrina Pane⁶, Trifonia Rouli Siringoringo⁷

^{1,2,3,4,5,6,7} Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Medan

e-mail: widyaoke@gmail.com¹, novitasiagian202@gmail.com², reni020211@gmail.com³, riscitarika@gmail.com⁴, sanahkerinci3@gmail.com⁵, sitirifa15597@gmail.com⁶, siringotrifoia@gmail.com⁷

Abstrak

Persamaan linear digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena alam, termasuk aliran panas, distribusi arus listrik, dan dinamika mekanik struktur bangunan. Diperlukan metode yang efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, terutama jika sistem tersebut memiliki dimensi yang besar. Metode yang dapat digunakan dalam penyelesaian numerik sistem persamaan linear adalah metode iterasi Jacobi. Dengan Penerapan Iterasi Jacobi dengan Excel dapat membantu menyelesaikan matriks linear. Dalam penelitian ini, data berupa sistem persamaan linear yang diambil dari literatur atau studi kasus akan dianalisis dengan metode iterasi dan hasilnya dievaluasi secara numerik, terutama terkait dengan konvergensi metode Jacobi. Dengan berjalannya program ini dengan baik maka Metode Jacobi menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran kecil hingga menengah. Metode Jacobi membutuhkan beberapa iterasi untuk mencapai solusi yang mendekati eksak, dengan syarat matriks koefisien memenuhi syarat konvergensi.

Kata Kunci: *Persamaan Linear, Excel, Metode Jacobi*

Abstract

Linear equations are used to model a variety of natural phenomena, including heat flow, electric current distribution, and the mechanical dynamics of building structures. An efficient method is needed to solve systems of linear equations, especially if the system has large dimensions. The method that can be used to solve numerical systems of linear equations is the Jacobi iteration method. Applying Jacobi Iteration with Excel can help solve linear matrices. In this research, data in the form of a system of linear equations taken from literature or case studies will be analyzed using an iterative method and the results evaluated numerically, especially in relation to the convergence of the Jacobi method. By running this program well, the Jacobi Method solves systems of small to medium sized linear equations. The Jacobi method requires several iterations to reach a solution that is close to exact, provided that the coefficient matrix meets the convergence requirements.

Keywords: *Linear Equations, Excel, Jacobi Method*

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear merupakan salah satu permasalahan matematika yang paling sering ditemukan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknik. Persamaan linear digunakan untuk memodelkan berbagai fenomena alam, termasuk aliran panas, distribusi arus listrik, dan dinamika mekanik struktur bangunan. Dalam konteks tersebut, diperlukan metode yang efisien untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, terutama jika sistem tersebut memiliki dimensi yang besar. Salah satu metode yang banyak digunakan dalam penyelesaian numerik sistem persamaan linear adalah metode iterasi Jacobi, sebuah metode sederhana namun cukup andal dalam menyelesaikan matriks besar yang jarang terisi penuh (*sparse matrix*).

Metode iterasi Jacobi bekerja dengan memisahkan setiap persamaan dalam sistem untuk menemukan solusi dari variabel yang dicari secara iterasi. Setiap iterasi menggunakan solusi sementara dari iterasi sebelumnya hingga perbedaan antara dua iterasi berturut-turut menjadi sangat kecil, sehingga dianggap sebagai solusi yang mendekati akurat. Metode ini memiliki kelebihan dalam kesederhanaannya dan kemampuannya untuk diimplementasikan secara paralel, yang membuatnya populer dalam pemrosesan komputasi numerik. Selain itu, Jacobi menjadi metode yang lebih disukai jika matriks koefisien sistem memiliki elemen-elemen diagonal yang dominan.

Microsoft Excel, yang umumnya dikenal sebagai perangkat lunak pengolah data dan *spreadsheet*, ternyata juga dapat digunakan untuk mengimplementasikan metode Jacobi. Fitur-fitur Excel, seperti penggunaan rumus dan fungsi iterasi, memungkinkan pengguna untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan langkah-langkah perhitungan yang terstruktur. Implementasi metode Jacobi di Excel menawarkan solusi yang mudah diakses dan dipahami, khususnya bagi para akademisi atau praktisi yang tidak memiliki akses ke perangkat lunak pemrograman numerik yang lebih kompleks. Dalam Excel, proses iterasi dan pembaruan solusi dapat dilacak dengan mudah, serta memanfaatkan visualisasi grafik untuk memantau konvergensi solusi.

Namun, implementasi metode Jacobi di Excel juga memiliki keterbatasan, terutama jika digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan yang sangat besar. Keterbatasan Excel dalam hal kecepatan perhitungan dan kapasitas data dapat mengurangi efisiensi metode ini pada sistem persamaan yang kompleks. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk mengeksplorasi bagaimana metode iterasi Jacobi dapat diterapkan secara efektif di Excel, serta menganalisis sejauh mana Excel dapat digunakan sebagai alat numerik dalam menyelesaikan sistem persamaan linear. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran tentang potensi dan batasan Excel dalam konteks penyelesaian numerik.

1. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan yang melibatkan variabel-variabel linear, yang diwakili dalam bentuk matriks. Sebuah sistem persamaan linear dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai $Ax = b$, dimana A adalah matriks koefisien berukuran $n \times n$, x adalah vektor variabel yang tidak diketahui berukuran $n \times 1$, dan b adalah vektor konstanta berukuran $n \times 1$.

Sistem ini muncul dalam berbagai disiplin ilmu, seperti fisika, ekonomi, dan teknik, di mana pemodelan hubungan linier antara variabel sering digunakan untuk menyelesaikan permasalahan riil seperti perhitungan distribusi arus listrik, mekanika struktur, dan analisis ekonomi.

2. Metode Iterasi Jacobi

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, ada berbagai metode yang dapat digunakan. Metode langsung seperti eliminasi Gauss biasanya digunakan untuk sistem persamaan berukuran kecil hingga sedang, karena metode ini memberikan solusi yang tepat dalam beberapa langkah operasi. Namun, untuk sistem dengan ukuran besar atau sistem yang memiliki matriks jarang terisi penuh (*sparse matrix*), metode iterasi sering lebih disukai. Metode iterasi memberikan solusi mendekati dengan melakukan perhitungan berulang kali hingga hasil yang diinginkan diperoleh. Salah satu metode iterasi yang paling umum digunakan adalah metode iterasi Jacobi, yang sederhana namun efisien untuk sistem tertentu.

Metode Jacobi adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Prinsip dasar dari metode ini adalah memisahkan variabel yang dicari di setiap persamaan, sehingga setiap elemen solusi pada iterasi berikutnya hanya bergantung pada nilai iterasi sebelumnya. Rumus umum untuk iterasi Jacobi adalah sebagai berikut.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ij}}$$

dimana:

- $x_i^{(k+1)}$ adalah nilai solusi untuk variabel ke- i pada iterasi ke- $k + 1$,

- b_i adalah elemen ke- i dari vector konstanta,
- a_{ij} adalah elemen matriks A , dan
- $x_j^{(k)}$ adalah nilai solusi pada iterasi ke- k .

Sistem persamaan linear sering kali muncul dalam bentuk matriks yang dominan secara diagonal, yaitu di mana elemen-elemen diagonal dari matriks A lebih besar dibandingkan dengan elemen non-diagonal dalam baris yang sama. Kondisi ini penting karena berpengaruh terhadap stabilitas dan konvergensi solusi dalam metode iterasi seperti Jacobi. Jika matriks tidak dominan secara diagonal, metode Jacobi bisa mengalami kesulitan untuk mencapai konvergensi. Selain itu, keakuratan hasil yang diperoleh dari metode iterasi seperti Jacobi sangat bergantung pada jumlah iterasi yang dilakukan dan toleransi kesalahan yang ditentukan di awal perhitungan.

Dalam penerapannya, sistem persamaan linear dengan metode iterasi sering kali digunakan dalam masalah yang melibatkan simulasi atau optimasi. Misalnya, dalam mekanika fluida, simulasi aliran udara atau air sering kali melibatkan penyelesaian sistem persamaan linear yang sangat besar. Demikian pula, dalam bidang ekonomi, pemodelan interaksi antar faktor produksi atau permintaan konsumen juga melibatkan penyelesaian sistem linear yang kompleks. Oleh karena itu, metode numerik seperti iterasi Jacobi sangat penting dalam mengatasi permasalahan yang kompleks dan besar, yang tidak dapat diselesaikan dengan metode langsung.

3. Excel Sebagai Alat Numerik

Microsoft Excel adalah perangkat lunak pengolah data yang umum digunakan dalam berbagai bidang, mulai dari bisnis, pendidikan, hingga penelitian ilmiah. Selain untuk pengolahan data dan penyajian hasil dalam bentuk tabel dan grafik, Excel juga memiliki kemampuan dalam menyelesaikan permasalahan numerik. Excel menyediakan berbagai fungsi dan alat bantu yang dapat digunakan untuk melakukan perhitungan matematis dan analisis numerik, seperti fungsi logika, statistik, aljabar, hingga kalkulus. Hal ini membuat Excel menjadi salah satu perangkat lunak yang mudah diakses dan dipahami oleh pengguna dari berbagai latar belakang, bahkan bagi mereka yang tidak memiliki keahlian pemrograman yang mendalam.

Salah satu keunggulan Excel adalah kemampuannya untuk melakukan perhitungan iteratif melalui penggunaan formula yang dapat diatur untuk melakukan update secara otomatis. Dalam konteks metode numerik seperti iterasi Jacobi, Excel memungkinkan pengguna untuk memulai dengan nilai tebakan awal untuk solusi, kemudian secara bertahap memperbarui nilai-nilai tersebut dalam iterasi selanjutnya berdasarkan rumus-rumus yang telah dimasukkan. Excel juga memiliki fitur pemformatan sel yang dapat digunakan untuk memvisualisasikan perubahan hasil iterasi, sehingga memudahkan pengguna dalam memantau proses konvergensi solusi.

Selain itu, Excel juga mendukung penggunaan *add-in* seperti *Solver*, yang dapat digunakan untuk melakukan optimasi dan penyelesaian persamaan. Dalam implementasi metode iterasi Jacobi, pengguna dapat memanfaatkan kemampuan Excel untuk mengatur batas toleransi kesalahan (*error tolerance*) dan jumlah iterasi yang diinginkan. Hal ini penting dalam metode iteratif, di mana solusi tidak dicapai secara langsung melainkan melalui serangkaian perkiraan yang semakin mendekati solusi yang benar.

METODE

1. Jenis Penelitian

Penelitian ini bersifat kuantitatif dengan metode eksperimen, di mana sistem persamaan linear diselesaikan menggunakan metode iterasi Jacobi dalam aplikasi Excel. Penelitian kuantitatif dipilih karena karakteristik dari permasalahan yang dibahas, yaitu sistem persamaan linear, sangat sesuai untuk dikuantifikasi dan dianalisis menggunakan teknik-teknik numerik. Dalam penelitian ini, data berupa sistem persamaan linear yang diambil dari literatur atau studi kasus akan dianalisis dengan metode iterasi dan hasilnya dievaluasi secara numerik, terutama terkait dengan konvergensi metode Jacobi.

2. Objek Penelitian

Objek penelitian dalam studi ini adalah sistem persamaan linear yang disusun dalam bentuk matriks, dengan ukuran yang bervariasi. Matriks yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari beberapa kasus, mulai dari matriks kecil berukuran 3x3 hingga matriks yang lebih besar berukuran 5x5 atau lebih. Pemilihan ukuran matriks ini bertujuan untuk menguji efektivitas dan batas kemampuan Excel dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode Jacobi. Selain itu, kasus-kasus tersebut juga diambil dari berbagai studi sebelumnya, yang memungkinkan penelitian ini untuk mengukur tingkat akurasi dan efisiensi metode iterasi Jacobi jika diterapkan dalam Excel.

3. Prosedur Penelitian

Langkah-langkah penelitian ini diawali dengan pemilihan sistem persamaan linear yang sesuai. Setelah sistem persamaan dipilih, persamaan tersebut akan dituliskan dalam bentuk matriks A , vektor x (solusi awal), dan vektor b (hasil persamaan) di lembar kerja Excel. Selanjutnya, algoritma iterasi Jacobi akan diterapkan dengan menghitung solusi sementara dari setiap variabel di setiap iterasi. Proses iterasi ini dilakukan dengan memasukkan rumus-rumus Excel yang akan memperbarui nilai solusi pada setiap langkah. Perhitungan dilanjutkan hingga nilai solusi konvergen, yaitu ketika selisih antara solusi pada iterasi sebelumnya dan solusi saat ini sudah sangat kecil dan berada di bawah batas toleransi kesalahan yang telah ditentukan.

Penggunaan Excel dalam penelitian ini akan memanfaatkan fitur-fitur seperti autofill dan referensi sel untuk mempercepat perhitungan pada setiap iterasi. Setelah proses iterasi selesai, hasil perhitungan akan dievaluasi dengan membandingkan solusi akhir dengan solusi analitik atau hasil dari metode numerik lainnya. Evaluasi ini dilakukan untuk mengukur tingkat akurasi metode iterasi Jacobi ketika diterapkan di Excel

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Jacobi merupakan salah satu metode penyelesaian sistem persamaan linear berdimensi banyak. Adapun nilai awal pada Iterasi Jacobi, yakni (x_1^0, x_2^0, x_3^0) . Dimana pangkat nol adalah nilai x_1 pada iterasi 0 (nilai awal atau titik awal). Iterasi yang dimaksudkan disini adalah proses perhitungan yang dilakukan secara berulang. Perlu diketahui bahwa Iterasi Jacobi dihentikan saat:

$$X_1^{n-1} \approx X_1^n, X_2^{n-1} \approx X_2^n, X_3^{n-1} \approx X_3^n$$

Nilai X_1^{n-1} mendekati X_1^n atau hasil iterasi sekarang jika dibandingkan dengan iterasi sebelumnya itu hampir sama atau selisihnya kurang dari Epsilon. Untuk penjelasan lebih lengkap, dapat mengikuti prosedur di bawah ini.

1) Menyiapkan Matriks dan Vektor Konstanta

Masukkan matriks koefisien A dan vektor konstanta b dalam tabel Excel

2) Menuliskan Rumus Jacobi di Excel

Buat kolom untuk solusi awal x^0 dan gunakan rumus iterasi Jacobi untuk menghitung solusi baru. Contoh sistem persamaan yang digunakan:

Dengan menggunakan iterasi Jacobi dan iterasi Gauss Seidel, tentukan solusi dari sistem persamaan linier berikut dengan titik awal $(0, 0, 0)$ dan eps. = 0,001.

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3$$

$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4$$

3) Melakukan Iterasi

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2}{10}$$

Mendapatkan nilai x_1 pada iterasi 1 dengan mensubstitusi nilai x_2 dan x_3 pada iterasi awal. Langkah yang sama digunakan untuk mendapatkan nilai x_2 dan x_3 .

	A	B	C	D	E
28					
29					
30		Iterasi	X1	X2	X3
31		Awal	0	0	0
32		1	2,616666667	-2,7571428571	7,1400000000
33		2	3,0007619048	-2,4885238095	7,0063571429

Melanjutkan proses iterasi dengan mencari nilai selisih x_1 , x_2 dan x_3 dari iterasi 1 kurang iterasi awal.

	F	G	H
28			
29	SELISIH		
30	X1	X2	X3
31			
32	2,6166666667	2,7571428571	7,1400000000
33	0,3840952381	0,2686190476	0,1336428571
34	0,0000444444	0,0112146259	0,0061504762

Menentukan selisih maksimum dari nilai selisih x_1 , x_2 dan x_3 .

	F	G	H	I
29	SELISIH			
30	X1	X2	X3	E - Max
31				
32	2,6166666667	2,7571428571	7,1400000000	2,6166666667
33	0,3840952381	0,2686190476	0,1336428571	2,2325714286
34	0,0000444444	0,0112146259	0,0061504762	0,3840507937

Mencari apakah iterasi dilanjutkan atau dihentikan dengan prosedur di bawah ini.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
29					SELISIH				
30	Iterasi	X1	X2	X3	X1	X2	X3	E - Max	LANJUT/BERHENTI
31	Awal	0	0	0					
32	1	2,6166666667	-2,7571428571	7,1400000000	2,6166666667	2,7571428571	7,1400000000	2,6166666667	LANJUT
33	2	3,0007619048	-2,4885238095	7,0063571429	0,3840952381	0,2686190476	0,1336428571	2,2325714286	LANJUT
34	3	3,0008063492	-2,4997384354	7,0002066667	0,0000444444	0,0112146259	0,0061504762	0,3840507937	LANJUT

Maka, diperoleh hasil akhirnya adalah sebagai berikut.

$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3}$	$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7}$	$x_3 = \frac{71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2}{10}$						
Metode Iterasi Jacobi								
Iterasi	X1	X2	X3	SELISIH			E - Max	LANJUT/BERHENTI
				X1	X2	X3		
Awal	0	0	0					
1	2,616666667	-2,7571428571	7,1400000000	2,616666667	2,7571428571	7,1400000000	2,616666667	LANJUT
2	3,0007619048	-2,4885238095	7,0063571429	0,3840952381	0,2686190476	0,1336428571	2,2325714286	LANJUT
3	3,0008063492	-2,4997384354	7,0002066667	0,0000444444	0,0112146259	0,0061504762	0,3840507937	LANJUT
4	3,0000224966	-2,5000026621	6,9999810408	0,0007838526	0,0002642268	0,0002256259	0,0007394082	BERHENTI
5	2,9999986473	-2,5000011339	6,999992719	0,0000238493	0,0000015282	0,0000182310	0,0007600033	BERHENTI
6	2,999999137	-2,5000000119	7,0000000179	0,0000012663	0,0000011220	0,0000007460	0,0000225829	BERHENTI
7	3,0000000008	-2,4999999980	7,0000000024	0,0000000871	0,0000000139	0,0000000155	0,0000011792	BERHENTI
8	3,0000000002	-2,4999999999	7,0000000000	0,0000000006	0,0000000019	0,0000000023	0,0000000866	BERHENTI
9	3,0000000000	-2,5000000000	7,0000000000	0,0000000002	0,0000000001	0,0000000000	0,0000000004	BERHENTI
10	3,0000000000	-2,5000000000	7,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000002	BERHENTI
11	3,0000000000	-2,5000000000	7,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	BERHENTI
12	3,0000000000	-2,5000000000	7,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000	BERHENTI

Hasil Implementasi

Solusi dari sistem persamaan linear diperoleh setelah beberapa iterasi dengan menggunakan Excel. Setelah iterasi ke-n, nilai solusi yang dihasilkan mendekati solusi yang tepat, dengan perbedaan di bawah ambang batas toleransi. Maka, solusi dari sistem persamaan linier tersebut dengan titik awal (0, 0, 0) dan $\text{eps.} = 0,001$ adalah $x_1 = 3,0000224966$, $x_2 = -2,5000026621$, dan $x_3 = 6,9999810408$.

Analisis Konvergensi

Dari hasil iterasi yang dilakukan, metode Jacobi menunjukkan konvergensi yang stabil, karena sistem persamaan yang digunakan memenuhi syarat diagonal dominan. Grafik perubahan nilai solusi dari setiap iterasi menunjukkan tren yang semakin mendekati solusi eksak.

Keuntungan dan Keterbatasan Penggunaan Excel

Excel memudahkan perhitungan manual dan memungkinkan pengguna untuk memvisualisasikan proses iterasi secara intuitif. Namun, untuk sistem persamaan dengan ukuran matriks yang sangat besar, Excel mungkin kurang efisien dibandingkan perangkat lunak numerik yang lebih khusus seperti Matlab atau Python.

SIMPULAN

Berdasarkan hasil implementasi metode iterasi Jacobi menggunakan Excel, dapat disimpulkan bahwa:

- 1) Metode Jacobi dapat diterapkan dengan mudah di Excel untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berukuran kecil hingga menengah.
- 2) Excel menyediakan alat yang cukup intuitif untuk melakukan perhitungan numerik secara iterasi.
- 3) Metode Jacobi membutuhkan beberapa iterasi untuk mencapai solusi yang mendekati eksak, dengan syarat matriks koefisien memenuhi syarat konvergensi.

DAFTAR PUSTAKA

- Adi, S. (2021). *Metode Numerik dalam Pemrograman Komputer*. Jakarta: Gramedia.
- Dwikristanto, Y. P., & Listiani, T. (2018). *Pengembangan modul pembelajaran pengolahan lembar kerja excel berbasis multimedia [Developing an Excel spreadsheet multimedia learning module]*. *Polyglot: Jurnal Ilmiah*, 14(1), 79-86.
- Hambali, M. R. (2020). *Menyelesaikan Masalah Persamaan Linear Menggunakan Microsoft Excel*. *Matematika: Jurnal Teori dan Terapan Matematika*, 19(2), 19-24.
- Haryanto, A. (2020). *Matematika Teknik dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Ihsan, H., Wahyuni, M. S., & Waode, Y. S. (2024). *Penerapan Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Kompleks*. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, 7(1), 34-54.

- Purnomo, B. (2023). *Pengantar Aljabar Linear dan Sistem Persamaan Linear*. Bandung: ITB Press.
- Raharjo, W. (2019). *Metode Iterasi dalam Matematika Terapan*. Surabaya: Penerbit Unair.
- Siregar, E. T., Alfina, O., Puspita, D., & Safii, M. (2023). *Pelatihan Penginputan Data Secara Otomatis Di Microsoft Excel Menggunakan Data Form Dan Macro Vba (Basic For Aplication) Di Sma It Unggul Al-Munadi Medan*. *Jurnal Pengabdian Pada Masyarakat METHABDI*, 3(2), 150-154.
- Suhendra, S. (2014). *Pengembangan Bahan Ajar Sistem Persamaan Linear dengan Microsoft Excel di Sekolah Menengah Atas*. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 8(2), 44-56.
- Wandalia, E. (2023). *Analisis Konvergensi Metode Iterasi Jacobi Dalam Menyelesaikan Persamaan Sistem Linier Matriks*. *Jurnal Dunia Ilmu*, 3(1).
- Wibisono, A. (2022). *Perhitungan Numerik dengan Spreadsheet*. Malang: UB Press.