ISSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 16365-16372
Volume 6 Nomor 2 Tahun 2022

Metode Inferensi Bayesian untuk Model Konjugat-Eksponensial Menggunakan Algoritma Variasional Em: Dengan Akasus Data Survival Heterogen

Faadilah Rizkaini[1], Abdurakhman[2]
[1,2] Magister Matematika, FMIPA Universitas Gadjah Mada, Indonesia
E-mail: faadilahrizkaini@mail.ugm.ac.id

Abstrak

Metode inferensi Bayesian dengan algoritma VEM merupakan prosedur yang efisien untuk estimasi marginal dari model probabilistik dengan variabel laten atau data yang tidak lengkap. Algoritma VEM membangun dan mengoptimalkan batas bawah pada marginal menggunakan kalkulus variasional. Selanjutnya, distribusi campuran hingga didefinisikan sebagai model eksponensial konjugasi yang digunakan untuk menganalisis data kelangsungan hidup. Simulasi diperluas ke model eksponensial konjugasi yang ditawarkan berdasarkan pengukuran BIC dan AIC yang baik untuk mendapatkan model terbaik dari data kelangsungan hidup.

Kata Kunci: *Inferensi Bayesian, Algoritma Variational EM, Data Survival.*

Abstract

The Bayesian inference method with the VEM algorithm is an efficient procedure for marginal estimation of a probabilistic model with latent variables or incomplete data. The VEM algorithm builds and optimizes the lower bound on marginal using variational calculus. Furthermore, the distribution of finite mixes is defined as a conjugate-exponential model used to analyze survival data. Simulations are extended to the conjugate-exponential model offered based on good BIC and AIC measurements to get the best model from survival data.

Keywords : *Bayesian Inference, Algoritma Variational EM, Data Survival.*

PENDAHULUAN

Masalah pemodelan statistik sering melibatkan sejumlah besar variabel acak dan sering kali lebih mudah untuk mengekspresikan hubungan independensi bersyarat antara variabel secara grafis. Model grafis seperti itu adalah alat intuitif untuk memvisualisasikan dependensi antar variabel. Selain itu, dengan mengeksploitasi hubungan independensi bersyarat, diberikan alternatif dengan prosedur efisien dalam mengkondisikan dan memarginalkan variabel dalam model yang diberikan (Pearl, 1988; Lauritzen dan Spiegelhalter, 1988; Heckerman , 1996; Cowell et al., 1999). Banyak model statistik standar, terutama model Bayesian dengan prior hierarki, dapat diekspresikan secara alami menggunakan model grafis probabilistik. Representasi ini dapat membantu mengembangkan kedua metode pengambilan sampel (mis. Sampel Gibbs) dan metode inferensi yang tepat (mis. Algoritma junction-tree) untuk model-model ini. Masalah penting dan sulit dalam inferensi Bayesian adalah menghitung fungsi likelihood marginal dari model. fungsi likelihood marginal merupakan kuantitas penting karena memungkinkan untuk memilih antara beberapa struktur model. Merupakan jumlah yang sulit untuk dihitung karena melibatkan pengintegrasian atas semua parameter dan variabel laten, yang biasanya merupakan integral yang berdimensi tinggi dan rumit sehingga perkiraan sederhana akan gagal dalam penyelesaian untuk memperoleh solusi.

Dalam makalah ini dijelaskan penggunaan metode variasional untuk mengestimasi fungsi likelihood marginal dan distribusi posterior model kompleks. Metode variasi, algoritma

Halaman 16365-16372
Volume 6 Nomor 2 Tahun 2022

variasional ekspektasi-maksimisasi (VEM) untuk mengatasi kelemahan algoritma EM. Pada dasarnya algoritma variasional ekspektasi-maksimisasi (VEM) merupakan metode yang diusulkan untuk melonggarkan persyaratan dari algoritma EM sehingga tidak membatasi aplikasi potensial dari suatu model tertentu. Dengan kata lain bahwa algoritma VEM digunakan untuk kasus dimana algoritma EM tidak dapat digunakan. Selain itu, algoritma VEM juga efektif diterapkan pada kasus data lengkap maupun data yang hilang atau observasi yang tidak lengkap. Dalam subbab berikutnya kami meninjau pendekatan Bayesian untuk struktur model pembelajaran. Pada bagian 2 kita beralih ke menggambarkan metode variasional yang diterapkan pada pembelajaran Bayesian, menurunkan algoritma Bayesian EM variasional dan membandingkannya dengan algoritma EM untuk estimasi maksimum posteriori (MAP). Pada bagian 3, kami fokus pada model dalam keluarga konjugat-eksponensial dan langkah-langkah memperoleh hasil dasar. Bagian 4, menerapkan model konjugat-eksponensial dalam masalah khusus mempelajari struktur independensi bersyarat dari grafik langsung model dengan variabel laten. Kami membandingkan metode variasional dengan BIC dan AIC. Kemudian dilanjutkan dengan diskusi area untuk pekerjaan di masa depan di area umum struktur model pembelajaran. Bagian terakhir memberikan suatu kesimpulan atau menyimpulkan dengan dengan singkat hasil pembahasan yang diperoleh dalam penelitian, bagian 5.

METODE PENELITIAN

Model Konjugasi-Eksponensial

Mempertimbangkan kelas tertentu dari model grafis dengan variabel laten, yang kami sebut model konjugat-eksponensial. Kami secara eksplisit menerapkan metode variasional untuk keluarga parametrik ini, menghasilkan generalisasi EM. Model konjugasi-eksponensial memenuhi dua kondisi:

Kondisi (1). Likelihood data lengkap adalah dari keluarga eksponensial: $p(y,x|\theta) = f(x,y)g(\theta)\exp\{\phi(\theta)^T u(x,y)\}$, dimana $\phi(\theta)$ adalah vektor parameter alami, dan u dan f dan g adalah fungsi yang mendefinisikan keluarga eksponensial.

Kondisi (2). Parameter prior adalah konjugat dengan likelihood data lengkap: $p(\theta|\eta,\nu) = h(\eta,\nu)g(\theta)^\eta \exp\{\phi(\theta)^T \nu\}$, dimana η dan ν adalah hyperparameter.

Teorema: (Model Konjugat-Eksponensial). Diberikan set data I.i.d y=y1,y2, …,yn, jika model memenuhi kondisi (1) dan kondisi (2) maka pada setiap iterasi algoritma VEM dan maksimum. $\mathcal{F}(q_x(x)q_\theta(\theta), y)$:

a. $q_\theta(\theta)$ adalah konjugat dengan parameter $\bar{\eta} = \eta + n$, $\bar{\nu} = \nu + \sum_{i=1}^n \bar{u}(y_i)$:
$$q_\theta(\theta) = h(\bar{\eta},\bar{\nu})g(\theta)^{\bar{\eta}} \exp\{\phi(\theta)^T \bar{\nu}\} \quad (7)$$
dimana $\bar{u}(y_i) = E_{q_{x_i}}(u(x_i,y_i))$, dengan $E_{q_{x_i}}$untuk menutasikan ekspektasi variasional posterior atas variable laten (s) untuk setiap i data.

b. $q_x(x) = \prod_{i=1}^n q_{x_i}(x_i)$ dengan:
$$q_{x_i}(x_i) = p(x_i|y_i,\bar{\phi}) \propto f(x_i,y_i)\exp\{\bar{\phi}^T u(x_i,y_i)\} \quad (8)$$
dimana $\bar{\phi}^T = E_{q_\theta}(\phi(\theta))$ ekspektasi dari parameter alami.

Bukti. Dengan Mengganti bentuk parametrik dari definisi keluarga konjugat-eksponensial ke dalam variasional ekstrim yang diberikan dalam (4) dan (5), mengungkapkan bentuk q(θ) dan qxx untuk masing-masing sesuai dengan (6) dan (7). Untuk model konjugat-eksponensial bentuk-bentuk ini kemudian ditutup di bawah iterasi variasional Bayesian EM, memastikan Teorema terus bertahan hingga konvergensi ke maksimum lokal dari batas bawah pada kemungkinan marjinal.

Perbandingan Algoritma VEM dan EM untuk Estimasi MAP

Instruktif untuk membandingkan (4) dan (5) dengan algoritma EM untuk estimasi MAP. Kami menggunakan derivasi alternatif EM karena Neal dan Hinton (1998):

EM untuk estimasi MAP	EM Bayesian Variacional
Tujuan: maksimum p(|y,m) w.r.t. **E-Step:** hitung qx(t+1)x=px|y,(t) **M-Step:** (t+1)=arg qx(t+1)xln px,y,θdx	**Tujuan:** batas bawah p(y|m) VE-Step: hitung qx(t+1)x=px|y,(t) **VM-Step:** q(t+1)exp qx(t+1)xln px,y,θdx

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Bayesian Inference

Mendefinisikan model campuran dari fungsi distribusi yang diestimasi menggunakan algoritma VEM. Model yang digunakan adalah model campuran *generalized* Gamma (GG) dinyatakan dengan:

$$p(x|\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i GG(x|\nu_i,\kappa_i,\eta_i) \qquad (9)$$

Masing-masing parameter adalah sebagai berikut $\boldsymbol{\Pi} = \{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_M\}$,$\pi_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{M}\pi_i = 1$. Kemudian untuk vector parameter adalah $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_M\}$,$\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_M\}$,$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_M\}$. Fungsi distribusi *generalized* Gamma (GG) adalah sebagai berikut:

$$GG(x|\nu_i,\kappa_i,\eta_i) = \frac{|\nu_i|}{\Gamma(\kappa_i)}(\kappa_i\eta_i)^{\kappa_i}x^{\nu_i\kappa_i-1}\exp[-\kappa_i\eta_i x^{\nu_i}]$$

Lebih lengkap dilihat dalam Liu, et.al., (2018). Algoritma VEM mempu memperoleh solusi estimasi untuk parameter model campuran generalized Gamma (GG), dengan langkah langkah yang diuraikan lengkap dalam jurnal rujukan. Diperoleh estimasi untuk model dengan Bayesian variasional EM. Mengingat data lengkap yang digunaan maka fungsi likelihood marginal dinyatakan dengan:

$$L(x|\Theta) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{M} z_{ni}\big[\ln\pi_i + \kappa_i\ln\kappa_i - \ln\Gamma(\kappa_i) + \kappa_i\ln\eta_i - \kappa_i\eta_i x_n^{\nu_i} + \ln|\nu_i| + (\nu_i\kappa_i - 1)\ln x_n\big] \qquad (10)$$

Diperhatikan bahwa dalam penerapan algoritma VEM untuk mengestimasi parameter model, maka setiap komponen parameter diperlakukan sebagaimana variable acak. Karenanya secara inferensi ditetapkan distrbusi prior untuk setiap parameter dalam model. Distribusi prior ditetapkan secara objektif oleh peneliti diantaranya:

$$\kappa_i \sim Gamma\big(\kappa_i;\alpha_{\kappa_i},\beta_{\kappa_i}\big) = \frac{1}{\Gamma\big(\alpha_{\kappa_i}\big)}\beta_{\kappa_i}^{\alpha_{\kappa_i}}x^{\alpha_{\kappa_i}-1}e^{\beta_{\kappa_i}x} \qquad (11a)$$

$$\eta_i \sim Gamma\big(\eta_i;\alpha_{\eta_i},\beta_{\eta_i}\big) = \frac{1}{\Gamma\big(\alpha_{\eta_i}\big)}\beta_{\eta_i}^{\alpha_{\eta_i}}x^{\alpha_{\eta_i}-1}e^{\beta_{\eta_i}x} \qquad (11b)$$

$$z_n \sim Mult(\{x_i\}_M;\{\alpha_i\}_M) = \prod_{i=1}^{M}\alpha_i^{x_i} \qquad (11c)$$

$$\kappa_i \sim Dir(\{x_i\}_M;\{\alpha_i\}_M) = \frac{\Gamma\big(\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\big)}{\prod_{i=1}^{M}\Gamma(\alpha_i)}\prod_{i=1}^{M}x_i^{\alpha_i-1} \qquad (11d)$$

Langkah-VE dimaksudkan untuk memperbarui distribusi posterior. Mengikuti bentuk umum dari distribusi posterior, pembaruan distribusi posterior diperoleh:

$$\ln q^*(\Pi) = \sum_{i=1}^{M}\left(u_{i0} + \sum_{n=1}^{N}E[z_{ni}]\right)\ln\pi_i + const \qquad (12a)$$

$$\ln q^*(\eta) = \sum_{i=1}^{M}\left\{\left(\alpha_{\eta_{i0}} - \bar{\kappa}_i\sum_{n=1}^{N}E[z_{ni}]\right)\ln\eta_i - \left(\beta_{\eta_{i0}} + \bar{\kappa}_i\sum_{n=1}^{N}E[z_{ni}]\,x_n^{\nu_i}\right)\eta_i\right\} + const \qquad (12b)$$

$$\ln q^*(\kappa) = \sum_{i=1}^{M} \Bigg\{ \Big(\alpha_{\kappa_{i0}} - \bar{\kappa}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \Big) \ln \kappa_i - \kappa_i \Bigg\{ \beta_{\kappa_{i0}} - \Big[\ln \bar{\kappa}_i - \frac{1}{\bar{\kappa}_i} - \psi(\bar{\kappa}_i) + 1 + \overline{\ln \eta_i} \Big] \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] - \nu_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \ln x_n + \bar{\eta}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]\, x_n^{\nu_i} \Bigg\} \Bigg\} + const \qquad (12c)$$

$$\ln q^*(z) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} z_{ni} \ln \rho_{ni} + const = \prod_{n=1}^{N} \prod_{i=1}^{M} r_{ni}^{z_{ni}} \qquad (12d)$$

Dalam metode yang diusulkan, pembaruan satu langkah dari metode Newton yang umum digunakan termasuk dalam langkah-VM untuk mencapai solusi yang dapat ditelusuri dan untuk mengurangi kompleksitas komputasi sebanyak mungkin. Kasus yang berbeda untuk variabel i. Distribusi prior yang tepat untuk parameter i tidak dapat langsung ditemukan dalam keluarga eksponensial karena istilah atau bentuk nonlinear. Oleh karena itu dipertimbangkan kelayakan pendekatan Taylor yang biasa digunakan untuk menemukan perkiraan batas bawah dari fungsi log-likelihood data lengkap, dan kemudian menentukan apakah ada distribusi prior yang sesuai dalam keluarga eksponensial (Liu, et.al., 2019). Fungsi non linier dari variable$_i$ adalah

$$f(\nu_i) = \ln|\nu_i\,| - \kappa_i \eta_i x^{\nu_i} \qquad (13)$$

Secara khusus, derivatif pertama dan kedua masing-masing diwakili oleh:

$$f'(\nu_i) = \frac{df(\nu_i)}{d\nu_i} = \frac{1}{\nu_i} - \kappa_i \eta_i x^{\nu_i} \ln x \qquad (14a)$$

$$f''^{(\nu_i)} = \frac{df'^{(\nu_i)}}{d\nu_i^2} = -\frac{1}{\nu_i^2} - \kappa_i \eta_i x^{\nu_i} \ln^2 x < 0 \qquad (14a)$$

Dengan demikian, kami memiliki solusi estimasi berikut untuk bentuk elemen ν_i dalam bentuk,

$$\nu_i^* = \frac{\sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]\{(1+s)\nu_i + \mathcal{F}_1(\nu_i, s)\}}{\sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]\{1 + \mathcal{F}_2(\nu_i)\}} \qquad (14)$$

masing-masing dijelaskan oleh:

$$\mathcal{F}_1(\nu_i, s) = \nu_i^2\, \bar{\kappa}_i \ln x_n [s + \bar{\eta}_i x_n^{\nu_i} - s\bar{\eta}_i x_n^{\nu_i}]$$

$$\mathcal{F}_2(\nu_i) = \nu_i^2\, \bar{\kappa}_i \bar{\eta}_i x_n^{\nu_i} (\ln x_n)^2$$

dengan mengikuti aloritma iterative EM, maka dapat digunakan

$\sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] = \frac{\pi_i f(x_i, y_i|\theta_i)}{\sum_{j=1}^{M} \pi_j f(x_i, y_i|\theta_i)}$ atau $E[z_{ni}] = r_{ni}$

s merupakan numerik yang dideterminasi oleh backtracking line search.

Karena konjugasi berlaku, pada langkah VE, memperbarui distribusi posterior sama dengan memperbarui hyperparameter yang sesuai dengan menyesuaikan bentuk-bentuk fungsional. Pada langkah VM berikutnya, parameter dapat diperbarui berdasarkan perolehan fungsi kerugian estimasi Bayes. Karena distribusi posterior adalah distribusi Dirichlet, persamaan pembaruan u dalam bentuk *elemen-wise* diberikan oleh:

$$u_i = u_{i0} + \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \qquad (15a)$$

pembaruan untuk hyperparameter mereka ditetapkan sebagai,

$$\alpha_{\eta_i} = \alpha_{\eta_{i0}} + \bar{\kappa}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \qquad (15b)$$

$$\beta_{\eta_i} = \beta_{\eta_{i0}} + \bar{\kappa}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]\, x_n^{\nu_i} \qquad (15c)$$

$$\alpha_{\kappa_i} = \alpha_{\kappa_{i0}} + \bar{\kappa}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \qquad (15d)$$

$$\beta_{\kappa_i} = \beta_{\kappa_{i0}} - \mathcal{P} - \nu_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}] \ln x_n + \bar{\eta}_i \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]\, x_n^{\nu_i} \qquad (15e)$$

masing-masing dijelaskan dengan:

$$\mathcal{P} = \left[\ln \bar{\kappa}_i - \frac{1}{\bar{\kappa}_i} - \psi(\bar{\kappa}_i) + 1 + \overline{\ln \eta_\iota}\right] \sum_{n=1}^{N} E[z_{ni}]$$

$$\bar{\kappa}_i = \frac{\alpha_{\kappa_i}}{\beta_{\kappa_i}},\ \bar{\eta}_i = \frac{\alpha_{\eta_i}}{\beta_{\eta_i}},\ \overline{\ln \eta_\iota} = \psi(\alpha_{\eta_i}) - \ln \beta_{\eta_i},\ E[z_{ni}] = r_{ni}.$$

Berdasarkan persamaan (15a), (15b), (15c), (15d), dan (15e), semua distribusi dan parameter posterior diperbarui secara iteratif hingga kriteria berhenti tercapai. Dalam setiap iterasi, nilai-nilai baru parameter dan parameter dievaluasi berturut-turut hingga mencapai konvergensi dengan kuantitas:

$$\lambda^2 = \left| \sum_{i=1}^{M} \frac{\sum_{i=1}^{N} E[z_{ni}] \left\{ \frac{1}{\nu_i} + \bar{\kappa}_i \ln x_n - \bar{\kappa}_i \bar{\eta}_i x_n^{\nu_i} \ln x_n \right\}}{\sum_{i=1}^{N} E[z_{ni}] \left\{ -\frac{1}{\nu_i^2} - \bar{\kappa}_i \bar{\eta}_i x_n^{\nu_i} \ln^2 x_n \right\}} \right| \qquad (16)$$

Metode Newton yang dimasukkan ke dalam algoritma VEM yang digunakan untuk mengestimasi parameter model, kuantitas 2 yang terkait dengan pengurangan Newton dan kuantitas ini berguna sebagai kriteria berhenti (Liu, et.al., 2018).

Hasil Simulasi Data

Sebagai contoh penerapan model konjugat-eksponensial digunakan data survival: berupa angka ketahanan hidup suatu kasus penelitian pasien penderita *Karsinoma Nasofarings* (KNF) selama tiga tahun. Untuk menganalisis data tersebut akan digunakan uji asumsi terhadap data menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov* dengan bantuan software R.3.6.1. Hasil uji asumsi *Kolmogorov-Smirnov* untuk data sebagai berikut:

Tabel 1. *One-Sample Kolmogorov-Smirnov*

Model Distribusi	**Statistik Uji (D)**	**p-*value***
Generalized Gamma	0.1194	0.2498
Gamma	0.13413	0.09734
Weibull	0.1062	0.2997
Eksponensial	0.16706	0.0184

Analisis output untuk uji kolmogorov-smirnov pada tabel 1. Adalah sebagai berikut:
Hipotesis:

H0 : Data sampel berasal dari distribusi yang diasumsikan

H1 : Data sampel tidak berasal dari distribusi yang diasumsikan

Statistik Uji:

D=maks|Fx-F0(x)|

Tolak H0 jika D≥D*(α), dimanaD*(δ) merupakan nilai kritis yang diperoleh dari table kolmogorov-smirnov atau menggunakan tolak H0 jika p-value ≤α=5%.

Berdasarkan nilai yang didapat, data sampel yang digunakan berdistribusi generalized Gamma, Gamma, dan Weibull dilihat dari p-value ≤α=5%. Selanjutnya dengan model campuran generalized Gamma dan beberapa model distribusi campuran dari kasus khusus generalized Gamma. Hasil estimasi diberikan sebagai berikut:

Tabel 2. Hasil Estimasi Hyperparameter Model Campuran *generalized* Gamma

***Initial value* Hyperparameter**	**Estimasi Hyperparameter**
i=0.359;0.298;0.343	i*=1.319;1.418;1.263
ηi=1.253;0.973;2.181	ηi*=3.192;5.317;1.435
ηi=0.731;3.032;2.901	ηi*=37.161;9.348;11.367
κi=2.142;1.473;1.761	κi*=3.637;3.34;4.873
κi=1.121;3.002;2.501	κi*=29.255;7.864;8.489

Table 2 menjelaskan bahwa dalam memberikan nilai peperkiraan terhadap parameter model diperlukan initial value yang digunakan untuk mengestimasi hyperparameter. Kemudian langkah selanjutnya dengan menentukan initial value untuk mengestimasi parameter posterior sehingga diperoleh nilai estimasi dari masing-masing komponen parameter yang kemudian digunakan untuk mengestimasi parameter model generalized Gamma, sebagai berikut:

Tabel 3. Hasil Estimasi Parameter Model Campuran *generalized* Gamma

Initial value Parameter Posterior	Estimasi Parameter model
i=0.319;0.418;0.263	i*=0.359;0.298;0.343
i=3.129;2.278;0.676	i*=0.66135;0.65515;0.51507
ηi0=1.281;4.287;0.731	i*={0.08589;0.56883;0.12626}
ηi0={2.537;1.617;3.981}	
κi0=2.637;2.534;3.873	i*={0.12432;0.44942;0.57406}
κi0=13.567;6.125;4.137	

Table 3 adalah hasil estimasi untuk parameter model generalized Gamma, sehingga bentuk model konjugat-eksponensial campuran distribusi generalized Gamma 3 komponen dituliskan:

$$p_{GG}(x|\mathbf{\Pi},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\eta}) = \pi_1^*\left\{\frac{|\nu_1^*|}{\Gamma(\kappa_1^*)}(\kappa_1^*\eta_1^*)^{\kappa_1^*}x^{\nu_1^*\kappa_1^*-1}\exp\left[-\kappa_1^*\eta_1^*x^{\nu_1^*}\right]\right\} + \pi_2^*\left\{\frac{|\nu_2^*|}{\Gamma(\kappa_2^*)}(\kappa_2^*\eta_2^*)^{\kappa_2^*}x^{\nu_2^*\kappa_2^*-1}\exp\left[-\kappa_2^*\eta_2^*x^{\nu_2^*}\right]\right\} + \pi_3^*\left\{\frac{|\nu_3^*|}{\Gamma(\kappa_3^*)}(\kappa_3^*\eta_3^*)^{\kappa_3^*}x^{\nu_3^*\kappa_3^*-1}\exp\left[-\kappa_3^*\eta_3^*x^{\nu_3^*}\right]\right\} \quad (15)$$

Diperhatikan untuk estimasi dari model yang merupakan kasus khusus dari distribusi generalized Gamma, disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4. Hasil Estimasi Parameter Model Campuran Gamma dan Weibull

Model Campuran Gamma	
Initial value	**Estimasi**
i=0.359;0.298;0.343	i*=0.5859548;0.0059588;0.4080864
ηi=1.570;2.768;2.792	i*=2.59044;5.24473;0.843146
ηi=6.715;3.271;6.169	i*=286.987;5.558149;273.4158
Model Campuran Weibull	
Initial value	**Estimasi**
i=0.319;0.418;0.263	i*=0.37331; 0.09188; 0.53481
i=0.870; 0.322; 1.873	i*=1.310352; 3.999792; 3.014429
i=03.561; 5.762; 1.915	i*=567.3449;925.00236;25

Berdasarkan Table 4, dapat dibentuk model konjugat-eksponensial campuran distribusi dari kasus khusus generalized Gamma 3 komponen. Sebagai berikut:
Model campuran distribusi Gamma:

$$p_{Gamma}\left(x|\alpha=\kappa_i^*,\beta=\frac{1}{\kappa_i^*\eta_i^*}\right) = \pi_1^*\left\{\frac{1}{\Gamma(\kappa_1^*)}(\kappa_1^*\eta_1^*)^{\kappa_1^*}x^{\kappa_1^*-1}\exp[-\kappa_1^*\eta_1^*x]\right\} + \pi_2^*\left\{\frac{1}{\Gamma(\kappa_2^*)}(\kappa_2^*\eta_2^*)^{\kappa_2^*}x^{\kappa_2^*-1}\exp[-\kappa_2^*\eta_2^*x]\right\} + \pi_3^*\left\{\frac{1}{\Gamma(\kappa_3^*)}(\kappa_3^*\eta_3^*)^{\kappa_3^*}x^{\kappa_3^*-1}\exp[-\kappa_3^*\eta_3^*x]\right\};\, i=1,2,3 \quad (16)$$

Model campuran distribusi Weibull :

$$p_{Weibull}\left(x|\alpha=\nu_i^*,\beta=\frac{1}{\eta_i^*}\right) = \pi_1^*\{\nu_1^*\eta_1^*x^{\nu_1^*-1}\exp[-\eta_1^*x^{\nu_1^*}]\} + \pi_2^*\{\nu_2^*\eta_2^*x^{\nu_2^*-1}\exp[-\eta_2^*x^{\nu_2^*}]\} + \pi_3^*\{\nu_3^*\eta_3^*x^{\nu_3^*-1}\exp[-\eta_3^*x^{\nu_3^*}]\};\, i=1,2,3 \quad (17)$$

Kemudian subtitusikan hasil estimasi yang diperoleh pada masing-masing persamaan model (15),(16), dan (17) untuk memperoleh fungsi likelihood marginal. Fungsi likelihood marginal yang diperoleh digunakan untuk mengetahui model terbaik yang dalam menganalisis data, didasarkan pada dua ukuran kebaikan model diantaranya BIC dan AIC. Diperoleh sebagai berikut:

Tabel 5. Perbandingan Model Campuran dalam Menganalisis Data Menggunakan Ukuran Kebaikan BIC dan AIC

Model Campuran	BIC	AIC
Generalized Gamma	1282.817	152.5636
Gamma	2614.904	1975.904
Weibull	1613.497	974.4972

Berdasarkan table 5, hasil nilai BIC dan AIC yang merupakan ukuran kebaikan dalam menentukan model terbaik untuk diterapkan dalam data diperoleh bahwa model campuran distribusi generalized Gamma merupakan model terbaik. Disesuaikan dan ditinjau dari nilai BIC=1282.817 dan nilai AIC=152.5636 adalah nilai yang paling kecil dibandingkan dua model distribusi campuran lainnya.

Diskusi Penelitian Lanjutan

Dalam penelitian ini, peneliti fokus pada penerapan algoritma VEM dalam mengestimasi parameter model generalized Gamma pada kasus incomplete data survival. Sebagaimana keberlangsungan penelitian ini, segala hal yang tercantum adalah mendukung arah penelitian sedemikian rupa hasil yang diperoleh sesuai harapan. Penelitian sebelumnya terkait algoritma VEM dan inferensi Bayesian tidak sepopuler algoritma EM standar. Karenanya untuk penelitian lebih lanjut terkait pengembangan algoritma VEM dalam kasus data yang lebih kompleks dapat dilakukan sehingga banyak kasus nyata yang dapat diselesaikan dengan algoritma VEM serta mempelajari lebih lanjut kriteria dari algoritma VEM lebih rinci.

SIMPULAN

Dalam kasus kasus algoritma VEM merupakan metode yang tepat digunakan untuk mengestimasi model yang kompleks. Model campuran distribusi generalized Gamma merupakan salah satu model kompleks karena mengandung fungsi nonlinear didalamnya. Estimasi parameter model campuran distribusi generalized Gamma membentuk fungsi densitas dengan nilai BIC dan AIC yang paling kecil dibandingkan dengan model lainnya. Karenanya untuk kasus data survival yang merupakan kasus data tidak lengkap, model campuran distribusi generalized Gamma merupakan metode yang tepat digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

Attias, H. 2000. A variational Bayesian framework for graphical models. In Advances in Neural Information Processing Systems 12, MIT Press.

Beal , Matthew J. and Ghahramani, Zoubin. 2003. The Variational Bayesian EM Algorithm for Incomplete Data: with Application to Scoring Graphical Model Structures. Bayesian Statistics. Gatsby Computational Neuroscience Unit, UCL, UK. Oxford University Press. Vol.7, pp. 000-000.

Bishop, C. M. 1999. Variational PCA. In Proc. Ninth Int. Conf. on Arti_cial Neural Networks. ICANN.

Cowell, R. G., Dawid, A. P., Lauritzen, S. L., and Spiegelhalter, D. J. 1999. Probabilistic Networks and Expert Systems. Springer-Verlag, New York.

Ghahramani, Z. and Beal, M. J. 2000. Variational inference for Bayesian mixtures of factor analysers. In Advances in Neural Information Processing Systems 12, MIT Press.

Hinton, G. E. and van Camp, D. 1993. Keeping neural networks simple by minimizing the description length of the weights. In Sixth ACM Conference on Computational Learning Theory, Santa Cruz.

Lauritzen, S. L. and Spiegelhalter, D. J. 1988. Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems. J. Roy. Statist. Soc. B, Vol.50,pp. 154-227.

Liu, Chi. Et. all. 2019. Bayesian Estimation of Generalized Gamma Mixture Model Based on Variational EM Algorithm. Pattern Recognition, Elsevier. Vol.87, pp.269-284.

MacKay, D. J. C. 1997. Ensemble learning for hidden Markov models. Technical report, Cavendish Laboratory, University of Cambridge.

Neal, R. M. and Hinton, G. E. 1998. A view of the EM algorithm that justi_es incremental, sparse, and other variants. In Jordan, M. I., editor, Learning in Graphical Models, pp. 355-369. Kluwer.

Pearl, J. 1988. Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. Morgan Kaufmann, San Mateo, CA.

Waterhouse, S., MacKay, D. J. C., and Robinson, T. 1995. Bayesian methods for mixtures of experts. In Advances in Neural Information Processing Systems 7, MIT Press.