ISSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 920-926
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

Garis Dan Bidang Dalam Ruang Berdimensi 3

Puja Marliana

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai
e-mail: pujamarliana123@gmail.com

Abstrak

Ruang berdimensi 3 atau yang biasa disebut juga dengan bangun ruang, merupakan salah satu materi pembelajaran yang berhubungan langsung dengan peserta didik. Ruang berdimensi 3 akan sangat mudah dijuampai oleh peserta didik di dalam kehidupan sehari-hari sehingga dalam pembelajaran ruang berdimensi 3 bisa menarik minat peserta didik dalam aktivitas peserta didik. Pada ruang berdimensi 3 terdapat bebearapa unsur garis dan bidang. Artikel ini akan membahas tentang garis dan bidang dalam ruang beridmensi 3. Metode pengumpulan informasi yang digunakan adalah studi literatur. Dengan adanya artikel ini, peserta didik bisa mengetahui unsur-unsur yang ada pada ruang berdimensi 3 disekitar mereka.

Kata kunci: *Ruang Berdimensi 3, Garis dan Bidang*

Abstract

3-dimensional space or commonly known as geometric shapes, is one of the learning materials that is directly related to students. A 3-dimensional space will be very easy for students to reach in everyday life so that in 3-dimensional space learning it can attract students' interest in student activities. In 3-dimensional space there are several elements of lines and planes. This article will discuss about lines and planes in dimension 3 space. The information gathering method used is literature study. With this article, students can find out the elements that exist in the 3-dimensional space around them.

Keywords: *3-Dimensional Space, Lines and Planes*

PENDAHULUAN

Garis merupakan suatu himpunan titik-titik yang anggotanya terdiri dari lebih satu buah titik. Dan titik-titik tersebut berderet ke dua arah yang berlawanan hingga jauh tidak terhingga. Sedangkan model ataupun representasi suatu garis misalkan seperti seutas benang atau juga tali lurus yang bisa diperpanjang pada kedua arah yang berlawanan hingga jauh tak terhingga. Garis hanya memiliki ukuran yang panjang, berbeda dengan titik yang diberikan nama menggunakan satu buah dari huruf kapital, tetapi garis diberi nama dengan mengunakan sebuah huruf kecil seperti g, h, k dan juga seterusnya ataupun dua buah huruf kapital misalkan AB, AC, BC dan juga seterusnya.

Bidang merupakan himpunan dari garis-garis yang anggotanya juga terdiri dari lebih satu buah garis. permukaan sebuah kertas yang bisa diperlebar ke semua arah. Bidang memiliki ukuran panjang dan juga lebar yang juga diberi nama dengan menyebutkan sebuah titik-titik sudut dari bidang tersebut ataupun huruf dan juga seterusnya.

Dimensi tiga merupakan bangun dengan ukuran yang terdiri atas panjang, lebar, dan tinggi. Dimensi tiga juga sering disebut juga dengan bangun ruang. Materi dimensi tiga yang akan dibahas pada halaman ini meliputi unsur dimensi tiga yang akan sering disebut ketika membahas materi dimensi tiga nantinya. Unsur tersebut adalah diagonal sisi, diagonal

Halaman 920-926
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

ruang, bidang frontal, dan bidang diagonal. Dimensi tiga terbentuk dari 3 elemen yaitu titik, garis, dan bidang.

Garis dan bidang dalam ruang berdimensi tiga menurunkan persamaan dengan menggunakan vektor, dan kita akan menggunakan persamaan-persamaan ini untuk menyelesaikan beberapa masalah-masalah geometris dasar.

Dalam geometri analitis bidang, sebuah garis bisa didapatkan dengan menentukan kemiringan dan salah satu titiknya. Dengan demikian menentukan inklinasi dan salah satu titiknya. Sebuah metode yang mudah untuk menguraikan inklinasi adalah dengan menentukan suatu vektor tak-nol(disebut suatu normal) yang tegak lurus dengan bidang tersebut.

Maka dari itu dalam penulisan akan dibahas secara mendalam mengenai Garis dan Bidang dalam Ruang Berdimensi Tiga dengan menggunakan vektor untuk menurunkan persamaan.

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada geometri analitik, suatu garis pada ruang berdimensi 2 dapat ditentukan jika kemiringan dan salah satu titiknya diketahui. Demikian juga kita dapat menentukan suatu bidang pada ruang berdimensi 3, jika kemiringan dan salah satu titiknya diketahui. Suatu metode mudah untuk menggambarkan kemiringan suatu bidang adalah dengan menentukan suatu vekto taknol, yang disebut ***vektor normal***, yang tegak lurus terhadap bidang tersebut.

Pada materi ini menggunakan vektor untuk menurunkan persamaan garis dan bidang pada ruang berdimensi 3. Kemudian kita akan menggunakan persamaan-persamaan tersebut untukmenmyelesaikan beberapa masalah geometrik dasar.

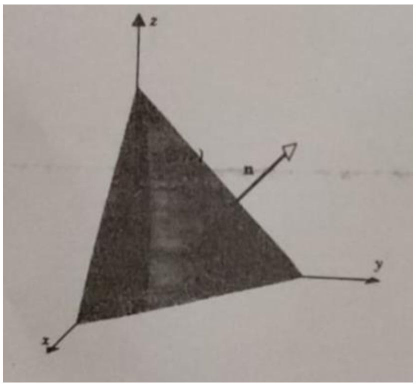
Misalkan kita ingin mencari persamaan dari bidang yang melewati titik P_0 (x_0, y_0, z_0) dan memiliki vektor taknol **n** = (a, b, c) sebagai normalnya. Tampak pada Gambar 1 bahwa bidang tersebut terdiri dari tepat titik-titik $P(x, y, z)$ tersebut dimana vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{PoP}}$ adalah orthogonal terhadap **n**, yaitu,n

$$\mathbf{n}.\overrightarrow{\boldsymbol{PoP}} = 0$$

Karena $\overrightarrow{PoP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, maka persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Kita menyebut ini sebagai bentuk ***normal-titik*** dari suatu bidang.



Gambar 1

Contoh
Tentukan persamaan suatu bidang yang melewati titik (3,-1,7) dan tegak lurus terhadap vektor **n =** (4,2,-5).
Penyelesaian:
Bentuk normal-titiknya adalah

$$4(x-3) + 2(y+1) – 5(z – 7) = 0$$

Dengan mengalikan dan kemudian mengeluarkan faktor-faktor, dapat ditulis Kembali dalam bentuk

$$ax + by + cz + d = 0$$

Dimana *a, b, c* dan *d* adalah konstanta dari *a, b,* dan *c* tidak semuanya nol. Dapatlah persamaan dari contoh yaitu

$$4x + 2y – 5z + 25 = 0$$

Sebagaimana ditunjukkan pada teorema berikut, bidang-bidang pada ruang berdimensi 3 diwakili oleh persamaan berbentuk $ax + by + cz + d = 0$

Teorema 3.5.1
Jika *a, b, c* dan *d* tidak semuanya nol, maka grafik daripersamaan

$$ax + by + cz + d = 0$$

adalah suatu bidang yang memiliki vektor **n** = (*a,b,c*) sebagai normalnya.
Persamaan diatas adalah suatu persamaan linear dalam *x,y,*dan *z,* dan disebut sebagai bentuk umum dari persamaan suatu bidang.

Bukti, menurut hipotesis, koefisien-koefisien *a, b,* dan *c* tidak semuanya nol. Asumsikan, untuk sementara, bahwa $a \neq 0$. Maka persamaan $ax + by + cz + d = 0$ dapat ditulis Kembali dalam bentuk $a(x + (d/a), 0, 0)$ dan memiliki **n** = (*a,b,c*) sebagai normalnya.

Jika $a = 0$, maka kalau $b \neq 0$ maka $c \neq 0$. Suatu modifikasi langsung dari argumen di atas akan berlaku untuk kasus-kasus lain berikut ini.
Sebagaimana solusi dari sistem persamaan linear

$ax + by = k_1$
$cx + dy = k_2$

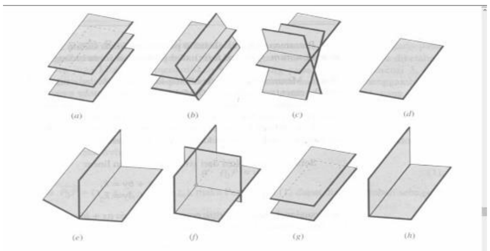
Bersesuaian dengan titik-titik potong garis-garis $ax + by = k_1$ dan $cx + dy = k_2$ pada bidang *xy,* maka demikian juga solusi dari sistem

$$ax + by + cz = k_1$$

$dx + ey + fz = k_2$
$gx + hy + iz= k_3$

Bersesuaian dengan titik-titik potong dari tiga bidang $ax + by + cz = k_1$, $dx + ey + fz = k_2$, dan $gx + hy + iz= k_3$.

Pada gambar dibawah ini, kita telah mengilustrasikan kemungkinan-kemungkinan geometrik yang muncul jika dari sistem diatas tadi tidak memiliki solusi, tepat satu solusi, atau takterhingga banyaknya solusi.



Gambar 2

Gambar 2 *(a)* Tidak ada solusi (3 bidang sejajar). *(b)* Tidak ada solusi (2 bidang sejajar). *(c)* Tidak ada solusi (3 bidang tidak memiliki titik potong yang sama). *(d)* Takterhingga banyaknya solusi (3 bidang berhimpitan). *(e)* Takterhingga banyaknya solusi (3

ISSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 920-926
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

bidang berpotongan pada satu garis). *(f)* Satu solusi (3 bidang berpotongan pada satu titik). *(g)* Tidak memiliki solusi (2 bidang berhimpitan yang sejajar dengan bidang ketiga). *(h)* Takterhingga banyaknya solusi (2 bidang yang berhimpitan dan memotong bidang ketiga).

Contoh

Tentukan persamaan suatu bidang yang melewati titik-titik $P_1(1,2,-1)$, P_2 (2,3,1) dan $P_3(3,-1,2)$

Penyelesaian:

Karena ketiga titik terletak pada suatu bidang, maka koordinat-koordinatnya harus memenuhi persamaan umum $ax + by + cz + d = 0$ dari bidang tersebut. Jadi,

$$a + 2b - c + d = 0$$
$$2a + 3b + c + d = 0$$
$$3a - b + 2c + d = 0$$

Dengan menyelesaikan sistem ini kita akan memperoleh

$$a = -\frac{9}{16}t,\ b = -\ \frac{1}{16}t,\ c = \frac{5}{16}t,\ d = t.$$

Dengan memasukkan nilai t = -16, sebagai contoh kita akan memperoleh persamaan

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

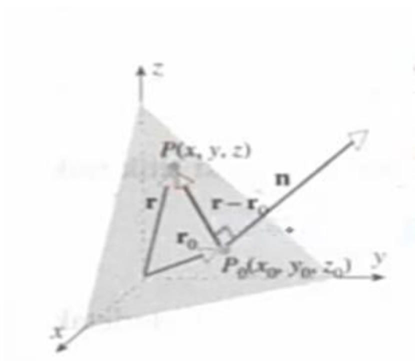
Kita ketahui untuk nilai t yang lain akan diperoleh kelipatan dari persamaan ini, sehingga berapapun nilai $t \neq 0$ akan memberikan suatu persamaan yang benar dari bidang tersebut.

Bentuk Vektor dari Persamaan Suatu Bidang

Notasi vektor menawarkan cara alternatif berguna untuk menuliskan bentuk normal-titik dari persamaan suatu bidang. Perhatikan gambar 3. Misalkan **r** = (x, y, z) adalah vector dari titik asal ke titik P(x, y, z) misalkan $\mathbf{r}_0 = (x_{0,}\ y_0.\ z_0)$, adalalah vector dari titik asal ke titik $P_0 = (x_{0,}\ y_0.\ z_0)$, dan misalkan **n =** ($a, b, c$) adalah suatu vector normal terhadap bidang. Maka $\overrightarrow{PoP}$ $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0,}$ sehingga Rumus nya dapat ditulis:

$$\mathbf{n} \ . \ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$$

ini disebut bentuk vektor dari persamaan suatu bidang.



Gambar 3

Garis pada Ruang Berdimensi 3

Misalkan garis l adalah garis pada ruang berdimensi 3 yang melewati titik P_0 $(x_{0,}\ y_{0,}\ z_0)$ dan sejajar dengan vektor taknol **v** = (a,b,c). Maka jelas pada Gambar 4 bahwa l terdiri dari tepat titik-titik P(x, y, z) tersebut dimana vektor $\overrightarrow{PoP}$ sejajar dengan **v**, yaitu dimana terdapat suatu skalar t, sedemikian rupa sehingga

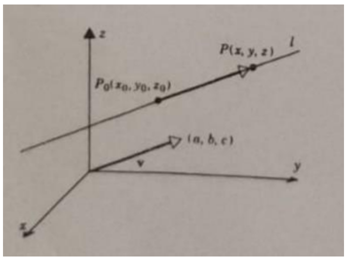
$$\overrightarrow{PoP} = t\mathbf{v}$$

Jika kita keluarkan komponen-komponennya dapat ditulis sebagai

$$(x\text{-}x_{0,}\ y\text{-}\ y_{0,}\ z\text{-}\ z_0) = (ta,tb,tc)$$

Sehingga diperoleh $x\text{-}x_0 = ta,\ y\text{-}\ y_0 = tb,\ z\text{-}\ z_0 = tc$, sehingga

$$x{=}x_0\ +\ ta,\ y{=}y_0 + tb,\ z{=}z_0 + tc$$



Gambar 4

Pada saat parameter *t* bervariasi antara -∞ hingga +∞, titik P(*x, y, z*) menelusuri garis *l.* Persamaan-persamaan
$x=x_0 + ta,\ y=y_0 + tb,\ z=z_0 + tc$ ($-\infty < t < +\infty$)
Disebut sebagai persamaan parametrik untuk *l.*

Contoh

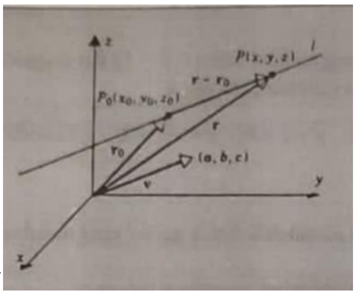
1. Tentukan persamaan-persamaan parametrik untuk garis *l* yang melewati titik-titik $P_1(2,4,-1)$ dan $P_2(5,0,7)$
2. Dimanakah garis tersebut memotong bidang *xy*?

Penyelesaian

1. Karena $\overrightarrow{P1P2}$ = (3,-4,8) sejajar dengan *l* dan $P_1(2,4,-1)$ terletak pada *l,* maka garis *l* mempunyai persamaan-persamaan parametrik.
$$x = 2 + 3t,\ y = 4 - 4t,\ z = -1 + 8t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$
2. Garis tersebut memotong bidang *xy* pada suatu titik di mana $z = -1 + 8t = 0,$ dimana $t = \frac{1}{8}$. Dengan mensubstitusi nilai *t* pada persamaan-persamaan parametrik untuk *l* maka diperoleh titik potong
$(x, y, z) = \frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0)$

Bentuk Vektor dari Persamaan Garis

Notasi vektor memberikan cara alternatif untuk menuliskan persamaan parametrik suatu garis. Jika kita lihat pada Gambar 5 dibawah ini



Gambar 5

Misalkan **r** = (*x, y, z*) adalah vektor darititik asal ke titik P(*x, y, z*), misalkan $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ adalah vektor dari titik asal ke titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan misalkan **v** = (*a, b, c*) adalah vektor yang sejajar dengan garis tersebut. Maka $\overrightarrow{PoP} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$, sehingga Rumus garis pada ruang berdimensi 3 diatas tadi dapat ditulis Kembali sebagai

$$\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = \mathbf{tv}$$

dengan memperhitungkan interval nilai-nilai *t,* persamaan ini dapat ditulis Kembali sebagai

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{tv} \ (-\infty < t < +\infty)$$

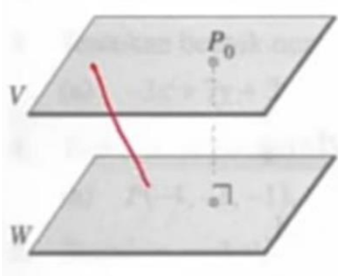
Ini disebut bentuk vektor dari persamaan suatu garis pada ruang berdimensi 3.

Masalah-masalah yang Menyangkut Jarak

Masalah-masalahnya yaitu:

1) Menentukan jarak antara suatu titik dengan suatu bidang.
2) Menentukan jarak antara dua bidang yang sejajar.

Kedua masalah ini saling berkaitan. Jika kita dapat mencari jarak antara suatu titik dan suatu bidang, maka kita dapat mencari jarak antara dua bidang yang sejajar dengan menghitung jarak antara salah satu bidang dan suatu titik P_0 sebarang yang terletak pada bidang lainnya Gambar 5



Gambar 6

Teorema 3.5.2 Jarak Antara Suatu Titik dan Suatu Bidang

Jarak D antara titik P_0 (x_0, y_0 , z_0) dan bidang *ax* + *by* + *cz* + *d* = 0 adalah

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Bukti. Misalkan *Q*(x_1, y_1, z_1) adalah suatu titik sebarang pada bidang. Tempatkan normal **n =** (*a, b, c*) sedemikian rupa sehingga titik awalnya terletak pada *Q.* sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 7, jarak D sama dengan Panjang proyeksi ortagonal $\overrightarrow{QP_0}$ pada n.

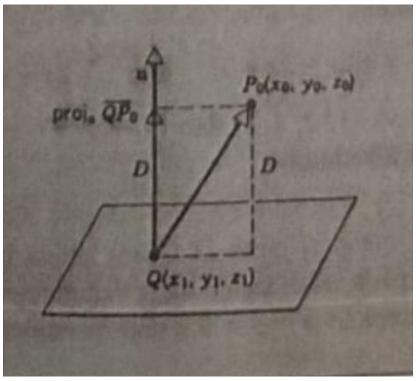
$$D = ||proj_n \overrightarrow{QP_0}|| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} . n|}{||n||}$$

Tetapi

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\overrightarrow{QP_0} . n = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$

$$||n|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Gambar 7

Jadi,

$$D = \frac{| a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Karena titik *Q*(x_1, y_1, z_1) terletak pada bidang tersebut, maka koordinatnya memenuhi persamaan bidang, jadi:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$
$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$$

Contoh
Tentukan jarak D antara titik (1, -4, -3) dan bidang $2x - 3y + 6z = -1$
Penyelesaian:
Untuk menggunakan teorema 3.5.2, kita terlebih dahulu menuliskan persamaan bidang tersebut dalam bentuk

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0$$

Kemudian

$$D = \frac{|\,2(1)+(-3)(-4)+6(-3)+1\,|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Contoh
Bidang-bidang

$$x + 2y - 2z = 3 \text{ dan } 2x + 4y - 4z = 7$$

Adalah sejajar karena normal-normalnya, (1, 2, -2) dan (2, 4, -4), adalah vektor-vektor yang sejajar. Tentukan jarak antara kedua bidang tersebut.
Penyelesaian:
Untuk menentukan jarak D antara kedua bidang tersebut, kita dapat memilih suatu titik sebarang pada salah satu bidang dan menghitung jaraknya terhadap bidang yang lain. Dengan memasukkan $y = z = 0$ pada persamaan $x + 2y - 2z = 3$, kita memperoleh titik P_0 dan bidang $2x + 4y - 4z = 7$ adalah

$$D = \frac{|\,2(3)+4(0)+(-4)(0)-7\,|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

SIMPULAN

Dimensi tiga merupakan bangun dengan ukuran yang terdiri atas panjang, lebar, dan tinggi. Dimensi tiga juga sering disebut juga dengan bangun ruang. Materi dimensi tiga yang akan dibahas pada halaman ini meliputi unsur dimensi tiga yang akan sering disebut ketika membahas materi dimensi tiga nantinya. Unsur tersebut adalah diagonal sisi, diagonal ruang, bidang frontal, dan bidang diagonal. Dimensi tiga terbentuk dari 3 elemen yaitu titik, garis, dan bidang.

Garis dan bidang dalam ruang berdimensi tiga menurunkan persamaan dengan menggunakan vektor, dan kita akan menggunakan persamaan-persamaan ini untuk menyelesaikan beberapa masalah-masalah geometris dasar. Yang berisi memaparkan seperti bentuk vektor dari persamaan suatu bidang, garis pada ruang berdimensi 3, bentuk vektor dari persamaan garis.

SARAN

Dalam artikel ini, penulis sadar akan banyaknya kekurangan, kesalahan dari segi penulisan kalimat, bahasa, bahkan materi yang ada didalam makalah. Maka dari itu, penulis harapkan kritik dan saran agar makalah ini jauh lebih baik dari sebelumnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yan telah terlibat dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Alghadari, F. (2017). Menentukan Jarak pada Ruang Dimensi Tiga dengan Analisis Vektor. *Konferensi Nasional Penelitian Matematika Dan Pembelajarannya*, *2*, 85–94.

Krismanto, A. (2008). Pembelajaran Sudut dan Jarak Dalam Ruang Dimensi Tiga di SMA. *Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional*, 64.