ISSN: 2614-6754 (print)
ISSN: 2614-3097(online)

Halaman 927-931
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

Pengaplikasian Integral untuk Membuktikan Rumus Keliling Lingkaran

Salsa Fitri Annisa

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,
Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai
e-mail: salsafitriannisa8@gmail.com

Abstrak

Lingkaran merupakan salah satu materi pembelajaran yang berhubungan langsung dengan peserta didik. Menentukan keliling lingkaran dapat digunakan rumus $2\pi R$, rumus keliling lingkaran dapat dibuktikan bisa menghitung keliling lingkaran dengan beberapa cara,salah satunya pengaplikasian integral. Pada artikel ini akan dijelaskan pengaplikasian integral untuk membuktikan rumus keliling lingkaran. Integral dapat diaplikasikan untuk membuktikan keliling lingkaran dalam koordinat kartesius dan koordinat polar (kutub). Pembuktian rumus keliling lingkaran dilakukan dengan menggunakan integral tungggal yang melibatkan lingkaran dengan pusat (0,0) dan (a,b) dalam koordinat kartesius Metode pengumpulan informasi yang digunakan adalah studi literatur. Dengan membuktikan rumus keliling lingkaran maka peserta didik mengetahui asal usul rumus keliling lingkran.

Kata kunci: *Lingkaran, Integral, Koordinat Kartesius*

Abstract

The circle is one of the learning materials that is directly related to students. Determining the circumference of a circle can be used formula 2, the formula for the circumference of a circle can be proven to be able to calculate the circumference of a circle in several ways, one of which is the application of the integral. In this article, we will explain the application of integrals to prove the formula for the circumference of a circle. The integral can be applied to prove the circumference of a circle in Cartesian and polar coordinates. The proof of the circumference formula is carried out using a single integral involving a circle with centers (0,0) and (a,b) in Cartesian coordinates. The information collection method used is a literature study. By proving the circle circumference formula, students know the origin of the circle circumference formula.

Keywords: *The Circle, The Integral, Circle in Cartesian*

PENDAHULUAN

Integral merupakan salah satu topik yang terdapat pada kalkulus. Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan invers dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu. Menurut Bernhard Rieman Integral didasarkan pada suatu prosedur pembatasan yang mendekati area suatu daerah kurva linier dengan patahan daerah ke dalam papan-papan vertikal. Terdapat dua konsep integral yaitu integral tak tentu dan integral tentu. Integral tentu juga disebut dengan integral Rieman.

Dalam aplikasinya, integral tertentu banyak digunakan untuk menentukan beberapa besaran, di antaranya ialah luas daerah bidang datar, volume dan luas permukaan benda putar, serta panjang kurva pada bidang. Penerapan integral dalam menentukan panjang kurva pada bidang dapat digunakan untuk membuktikan rumus keliling lingkaran. Lingkaran merupakan himpunan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak tetap dari titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran. Pada dasarnya pengaplikasian integral dalam menentukan rumus keliling lingkaran berkaitan dengan integral tunggal yang dinyatakan dalam koordinat kartesius maupun koordinat polar.

METODE

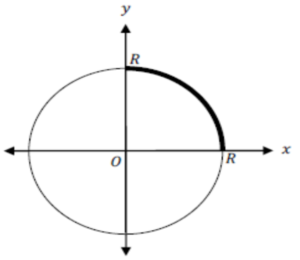
Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran Dalam Koordinat Kartesius

lingkaran berpusat di (0,0)

Untuk membuktikan rumus keliling lingkaran pada koordinat kartesius ini memerlukan turunan impilist dari persamaan lingkaran. Turunan implisit ini merupakan turunan dengan fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel derjenis variabel bebas dan variabel terikat yang berada dalam satu ruas dan tidak bisa dipindahkan pada ruas yang berbeda.



Gambar 1

Persamaan lingkaran yang berpusat di (0,0) dan berjari-jari R dalam koordinat kartesius adalah $x^2 + y^2 = R^2$. (1)

Dengan demikian turunan implisitnya yaitu $2x\ dx + 2y\ dy = 0 \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (2)

Pada gambar 1 dapat dilihat bahwa keliling lingkaran adalah empat kali panjang kurva pada interval [0,R]. Dengan demikian rumus keliling lingkaran dengan pusat (0,0) menggunakan integral dalam koordinat kartesius.

$\frac{1}{4}K = \int_0^R \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ dx (3)

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam persamaan (3)

$\frac{1}{4}K = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\ dx$ (4)

Dengan memisalkan $\frac{x}{R} = \sin u$, (5)

maka : $dx = R\cos u\ du$, $x = 0 \rightarrow u = 0$ dan $x = R \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$ (6)

Oleh karena itu persamaan (4) dapat ditulis:

$$\frac{1}{4}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 u}}\ R\cos u\ du$$

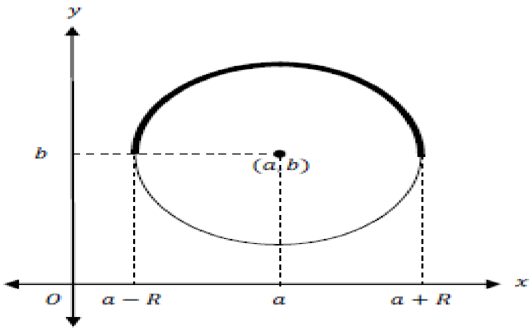
$\frac{1}{4}K = \frac{1}{2}\pi R$ (7)

$K = 2\pi R$ (8)

Sehingga terbukti rumus keliling lingkaran adalah $K = 2\pi R$

Halaman 927-931
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

Lingkaran berpusat di (a,b)



Gambar 2

Persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dengan $a, b \neq 0$ adalah

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ atau (1)

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$. (2)

Jika diturunkan secara implisit maka akan diperoleh:

$2(x-a)dx + 2(y-b)dy = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$ (3)

Dengan membagi lingkaran menjadi dua seperti Gambar 2, maka keliling lingkaran sama dengan dua kali panjang kurva pada interval $[a-R, a+R]$ sehingga, rumus keliling lingkaran ditentukan oleh persamaan berikut:

$\frac{1}{2}K = \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\, dx = \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (4)

Substitusikan persamaan (1) dan (3) pada persamaan (4)

$\int_{a-R}^{a+R} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{R}\right)^2}} dx$ (5)

Dengan cara yang sama dengan persamaan (5) dan (7) pada lingkaran pusat di (0,0) dan memisalkan $\frac{x-a}{R} = \sin u$, maka

$\frac{1}{2}K = \int_{a-R}^{a+R} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\, R \cos u\, du$ (6)

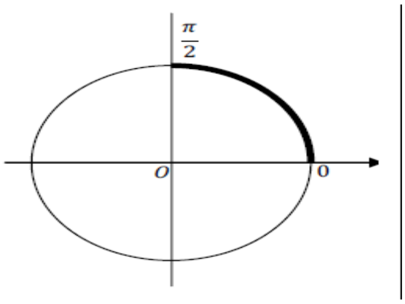
$\frac{1}{2}K = \pi R$

$K = 2\pi R$

Sehingga diperoleh rumus keliling lingkaran $K = 2\pi R$. Rumus keliling lingkaran juga dapat diperoleh dengan menghitung panjang kurva pada interval $y \in [b-R, b+R]$ dan memisalkan $\frac{y-b}{R} = \sin u$

Pembuktian rumus Keliling Lingkaran dengan Integral Dalam Koordinat Polar

1. Lingkaran Berpusat Di (0,0)



Gambar 3

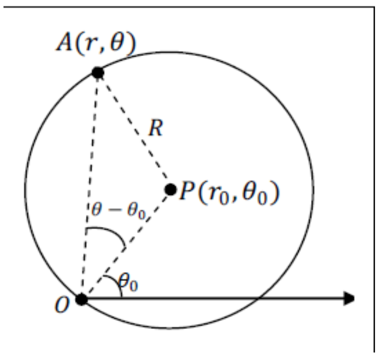
Dimisalkan r adalah jari-jari lingkaran pada koordinat polar. Dengan demikian r = R dan $\frac{dr}{d\theta} = 0$.
Keliling lingkaran adalah 4 kali panjang kurva pada interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ sehingga dapat ditentukan rumus seperempat keliling lingkaran dengan pusat (0,0) dalam koordinat polar sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}\,K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$
$$\frac{1}{4}K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 + 0^2}\ d\theta$$
$$\frac{1}{4}K\ = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$\frac{1}{4}K = \frac{\pi}{2}R$$
$$K = \frac{\pi}{2}R \times \frac{4}{1}$$
$$K = 2\pi R$$

Dengan demikian, diperoleh rumus keliling lingkaran yang sama, yakni $K = 2\pi R$

2. lingkaran pusat di $(r0, \theta0)$.

Selanjutnya, ditentukan rumus keliling lingkaran dengan pusat $(r0, \theta0)$ dalam koordinat polar dengan $r0 \neq 0$ dan $\theta0 \neq 0$ berturut-turut adalah modulus dan argumen titik pusat lingkaran.



Gambar 4

Keliling lingkaran dengan pusat $(r0, \theta0)$ dalam koordinat polar pada Gambar 4, dipenuhi
$r = 2R\cos(\theta - \theta0)$
Dengan demikian turunan implisitnya diperoleh

$$\frac{dr}{d\theta} = \ -2R\sin(\theta - \theta0)$$

Halaman 927-931
Volume 6 Nomor 1 Tahun 2022

Selanjutnya, rumus keliling lingkaran dengan pusat $(r0, \theta 0)$ ditentukan sebagai berikut:

$$K = \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$
$$K = \int_0^\pi \sqrt{4R^2 \cos^2(\theta - \theta 0) + 4R^2 \sin^2(\theta - \theta 0)}\, d\theta$$
$$K = \int_0^\pi \sqrt{4R^2 \left(\cos^2(\theta - \theta 0) + \sin^2(\theta - \theta 0)\right)}\, d\theta$$
$$K = \int_0^\pi \sqrt{4R^2}\, d\theta$$
$$K = 2R \int_0^\pi d\theta$$
$$K = 2\pi R$$

Sehingga diperoleh rumus keliling lingkaran yaitu $K = 2\pi R$

SIMPULAN

Integral dapat diaplikasikan untuk membuktikan keliling lingkaran dalam koordinat kartesius dan koordinat polar (kutub). Pembuktian rumus keliling lingkaran dilakukan dengan menggunakan integral tungggal yang melibatkan lingkaran dengan pusat (0,0) dan (a,b) dalam koordinat kartesius dengan menurunkan persamaan lingkaran secara implisit dan menggunakan rumus panjang kurva dengan integral tunggal yaitu $K = \int_0^R \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Pembuktian rumus keliling lingkaran dalam koordinat polar pada lingkaran yang berpusat di (0,0) dan (r, θ) persamaan lingkaran diturunkan secara implisit untuk selanjutnya disubtitusikan ke dalam rumus panjang kurva $K = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

SARAN

Artikel ini masih belum sempurna dalam penulisan, sehingga diharapkan jika ada saran atau kritik dapat digunakan untuk penulisan berikutnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yan telah terlibat dalam penulisan artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Imaniyah, A., Susanto, K., & Lestari, A. S. B. (2021). Aplikasi Integral Untuk Membuktikan Rumus Keliling Lingkaran. *Euler: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains Dan Teknologi*, *9*(1), 17-23.

Alhidayah, D. N. (2010). *Ekuivalensi Integral Riemann Dan Integral Darboux* (Doctoral Dissertation, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim).

Imaniyah, A. (2019, Desember). Pembuktian Rumus Keliling Lingkaran Dengan Integral Polar. In SENANDIKA 2019.

Utomo, R., Santosa, R. G., & Haryono, N. A. (2011). Penghitungan Luas Daerah Di Dalam Kurva Polar. *Jurnal Informatika*, *4*(2).